**НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»**

фізико-математичний факультет

кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

«На правах рукопису»
УДК 519.21

«До захисту допущено»
Завідувач кафедри
___________ О. І. Клесов
«___»___________ 2018 р.

Магістерська дисертація

на здобуття ступеня магістра

зі спеціальності 111 Математика

на тему: «Асимптотичні властивості оцінки найменших квадратів параметрів синусоїдної моделі текстурованої поверхні»

Виконала:
студентка VI курсу, групи ОМ-61м
Маляр Олександра Володимирівна ___________

Керівник:
проф., д. ф.-м. н., проф.
Іванов О. В. ___________

Рецензент:
Член-кор. НАНУ,
зав. відділом мат. методів дослідження операцій
Інституту кібернетики ім. В. М. Глушкова НАНУ,
д. ф.-м. н., проф.
Кнопов П. С. ___________

Засвідчую, що у цій магістерській дисертації немає запозичень з праць інших авторів без відповідних посилань.
Студентка _____________

Київ – 2018

Національний технічний університет України

«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

фізико-математичний факультет

кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

Рівень вищої освіти – другий (магістерський) за освітньо-професійною програмою

Спеціальність (спеціалізація) – 111 «Математика» («Страхова та фінансова математика»)

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

__________ О. І. Клесов

«___»_____________2018 р.

ЗАВДАННЯ
на магістерську дисертацію студенту

Маляр Олександрі Володимирівні

1. Тема дисертації «Асимптотичні властивості оцінки найменших квадратів параметрів синусоїдної моделі текстурованої поверхні»,

науковий керівник дисертації Іванов Олександр Володимирович, доктор фізико-математичних наук, професор,

затверджені наказом по університету від «23» березня 2018 р. № 1016-с.

2. Термін подання студентом дисертації 4 травня 2018 р.

3. Об’єкт дослідження синусоїдна модель текстурованої поверхні.

4. Предмет дослідження асимптотичні властивості оцінки найменших квадратів параметрів синусоїдної моделі текстурованої поверхні.

5. Перелік завдань, які потрібно розробити

1) довести властивість консистентності оцінки найменших квадратів параметрів синусоїдної моделі текстурованої поверхні;

2) довести теорему редукції;

3) довести теорему асимптотичної єдиності оцінки найменших квадратів;

4) довести асимптотичну нормальність оцінки найменших квадратів параметрів досліджуваної моделі.

6. Орієнтовний перелік ілюстративного матеріалу 22 слайди.

7. Орієнтовний перелік публікацій

1) О. В. Іванов, О. В. Маляр. Консистентність оцінки найменших квадратів параметрів текстурованої поверхні // Наукові вісті НТУУ "Київський політехнічний інститут". – 2017. - № 4 (114). – с. 47-53.

2) О. В. Іванов, О. В. Маляр. Консистентність оцінки найменших квадратів параметрів синусоїдної моделі текстурованої поверхні // Теорія ймовірностей та математична статистика. – 2017. - № 97. – с. 72-82.

3) О. В. Маляр. Консистентність оцінки найменших квадратів параметрів текстурованої поверхні // VI всеукраїнська конференція молодих вчених з математики та фізики. - 21-22 квітня, 2017. - Київ. - с. 25.

4) О. В. Іванов, О. В. Маляр. Виявлення прихованих періодичностей за спостереженнями випадкового поля на площині // Матеріали XVIII міжнародної конференції імені академіка Михайла Кравчука. - 7-10 жовтня, 2017. - Луцьк-Київ. - т.2. - с. 41-43.

5) О. В. Маляр. Асимптотична нормальність оцінки найменших квадратів параметрів синусоїдної моделі текстурованої поверхні // VII всеукраїнська конференція студентів, аспірантів та молодих вчених з математики. - 19-20 квітня, 2018. - Київ. - с. 22.

8. Дата видачі завдання 5 лютого 2018 р.

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання магістерської дисертації	Термін виконання етапів магістерської дисертації	Примітка
1.	Ознайомлення з літературою	05.02.2018-15.02.2018	виконано
2.	Доведення консистентності оцінки найменших квадратів параметрів синусоїдної моделі текстурованої поверхні	16.02.2018-04.03.2018	виконано
3.	Доведення теореми редукції	05.03.2018-18.03.2018	виконано

4.	Доведення асимптотичної єдності оцінки найменших квадратів	19.03.2018-03.04.2018	виконано
5.	Доведення асимптотичної нормальності оцінки найменших квадратів	04.04.2018-19.04.2018	виконано
6.	Оформлення роботи	20.04.2018-03.05.2018	виконано

Студент О. В. Маляр

Науковий керівник дисертації О. В. Іванов

Реферат

Магістерська дисертація: 59 сторінок, __ слайдів для проектора, 31 першоджерел.

Вивчаються асимптотичні властивості оцінки найменших квадратів параметрів синусоїдної моделі текстурованої поверхні.

Мета роботи полягає в отриманні вимог до параметричної множини та випадкового поля, яким моделюється випадковий шум, за яких оцінки найменших квадратів невідомих амплітуд та кутових частот суми двовимірних гармонічних коливань є сильно консистентними та асимптотично нормальними.

Завданням роботи є отримання результатів про сильну консистентність та асимптотичну нормальність оцінки найменших квадратів параметрів синусоїдної моделі текстурованої поверхні. Об'єктом дослідження є тригонометрична модель регересії на площині з неперервним параметром спостережень. Предметом дослідження є властивості консистентності та асимптотичної нормальності оцінки найменших квадратів параметрів тригонометричної моделі регресії на площині.

Для отримання вказаних результатів використано складні поняття теорії ймовірностей і математичної статистики, методи статистичного аналізу випадкових полів, теорему Брауера про нерухому точку.

Вперше в моделі тригонометричної регресії на площині з однорідним та ізотропним гауссівським полем у якості шуму доведено сильну консистентність та асимптотичну нормальність оцінки найменших квадратів невідомих параметрів, коваріаційну матрицю граничного нормального закону записано в явному вигляді. Це визначає актуальність, важливість та новизну отриманих результатів для статистики випадкових полів.

Ключові слова: Синусоїдна модель, текстурована поверхня, однорідне та ізотропне випадкове поле, оцінка найменших квадратів, консистентність, асимптотична єдиність, теорема Брауера про нерухому точку, асимптотична нормальність.

Abstract

Master degree thesis contains 59 pages, __ slides for projector, 31 primary sourses.

The least squares estimator asymptotic properties of textured surface sinusoi dal model parameters are studied.

The goal of the work lies in obtaining requirements to parametric set and random field that plays the role of random noise to ensure strong consistency and asymptotic normality of unknown amplitudes and angular frequencies the least squares estimator of a sum of bivariate harmonic oscillations.

The task of the research is receiving results on the least squares estimator strong consistency and asymptotic normality of textured surface sinusoidal model parameters. Trigonometric regression model on the plane with continuous observation parameter is the object of the studying. Consistency and asymptotic normality of trigonometric regression model parameters the least squares estimator on the plane is the research subject.

For obtaining the thesis results complicated concepts of probability theory and mathematical statistics, methods of statistical analysis of random fields, Brouwer fixed point theorem have been used.

For the first time in trigonometric regression model on the plane with homogeneous and isotropic Gaussian random noise the least squares estimator consistency and asymptotic normality of unknown parameters are proved, covariance matrix of the limiting normal law is written down in explicit form. These facts determine urgency, importance and novelty of results obtained for statistics of random fields.

Key words: sinusoidal model, textured surface, homogeneous and, isotropic random field, the least squares estimator, consistency, asymptotic uniqueness, Brouwer fixed point theorem, asymptotic normality.

Зміст

Вступ

У роботі розглянуто двовимірну синусоїдну модель спостережень текстурованої поверхні, різноманітні дискретні модифікації якої отримали велику увагу в літературі з обробки сигналів, завдяки їх застосуванню в аналізі текстур [1–4], зокрема, в обробці, так званих, симетричних образів відтінків сірого (symmetric gray-scale texture images), у тому розумінні, що інтенсивність сірого кольору в будь-якій точці цього образу пропорційна значенню процесу, що спостерігається, у цій точці. Ця проблема має спеціальний інтерес у спектральному аналізі [5, 6], див. також [4] та присутні там посилання на прикладні публікації з указаної проблематики.

В нашій роботі отримано властивості консистентності та асимптотичної нормальності оцінки найменших квадратів (ОНК) невідомих параметрів синусоїдної моделі у випадку, коли випадковий шум є однорідним та ізотропним гауссівським полем на площині [7, 8]. З математичної точки зору така постановка задачі оцінювання є природним узагальненням добре відомої проблеми виявлення прихованих періодичностей (див., наприклад, [9–11]).

У дискретній постановці задачі, коли помилки спостережень є незалежними однаково розподіленими випадковими величинами, зокрема, гауссівськими, асимптотичні властивості ОНК було розглянуто в роботах [12, 13]. Для помилок спостережень, що утворюють дискретне лінійне однорідне поле, ці результати узагальнено в [14]. Зауважимо також, що в роботі [15] розглянуто багатопараметричне гармонічне коливання, що спостерігається на фоні однорідного випадкового поля, у якого існують спектральні щільності всіх порядків. Для такої моделі сформульовано деякі результати про асимптотичну поведінку періодограмних оцінок і ОНК невідомих амплітуд і кутових частот цього гармонічного коливання. В монографії [16] розглядалася задача оцінювання кутових частот багатопараметричного сигналу, періодичного за кожною змінною, що спостерігається на фоні однорідного випадкового поля, яке задовольняє умові сильного перемішування.

Магістерська дисертація складається із чотирьох розділів.

У 1-му розділі розглянуто модель спостережень та висунуто вимоги до параметричної множини, в якій ми шукаємо ОНК амплітуд та кутових частот суми двовимірних гармонічних коливань. Справа в тому, що тригонометрична функція регресії погано розрізняє параметри. Для того, щоб допомогти їй розрізняти параметри краще, ми слідом за А. М. Уолкером [17], розглядаємо систему параметричних множин, яка дозволяє так означити ОНК, що ми можемо довести теорему 1 про сильну консистентність цієї оцінки, зробивши потрібні припущення щодо випадкового шуму, що є випадковим полем на площині, та поведінки його коваріаційної функції.

У 2-му розділі для загальної нелінійної маделі регресії доведено теорему редукції (теорема 2), яка дозволяє в подальшому тексті роботи звести доведення асимптотичної нормальності ОНК до доведення асимптотичної нормальності ОНК в деякій допоміжній лінійній моделі регресії. Таким чином, фактично, теорема 2 є теоремою лінеаризації. Оскільки ми робимо припущення про гауссівість шуму, для отримання асимптотичної нормальності ОНК в лінійній моделі достатньо довести збіжність її коваріаційної матриці до деякої границі. Перевірено, що синусоїдна модель задовольняє умовам теореми 2.

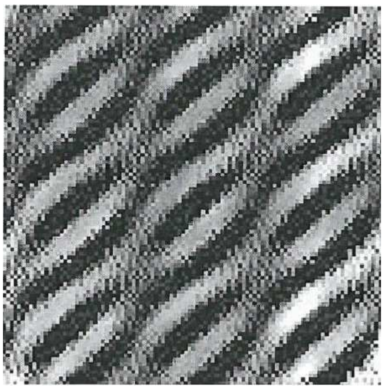

Рис. 1: Графік реальних даних

У 3-му розділі для загальної нелінійної моделі регресії доведено теорему 3 про асимптотичну єдиність консистентної ОНК і показано, що тригонометрична функція регресії задовольняє умовам цієї теореми.

У останньому, 4-му розділі з використанням результатів попередніх розділів, поняття спектральної міри функції регресії та теореми Брауера про нерухому точку доведено загальну теорему 4 про асимптотичну нормальність ОНК в сенсі Уолкера. Далі знайдено спектральну міру тригонометричної функції регресії та отримано теорему 5 про асимптотичну нормальність ОНК параметрів синусоїдної моделі текстурованої поверхні.

Зауважимо, що доведення асимптотичної нормальності ОНК використовує схему, запропоновану в роботах [10, 11], але теореми 2-4 є польовими узагальненнями відповідних фактів вказаних робіт.

Результати 1-го розділу надруковано в роботах [18, 19] та доповідалися на VI всеукраїнській конференції молодих вчених з математики та фізики [20] і на XVIII міжнародній конференції імені академіка Михайла Кравчука [21].

Результати розділів 2-4 доповідалися на VII всеукраїнській конференції студентів, аспірантів та молодих вчених [22].

Сукупність отриманих в магістерській дисертації результатів була нагороджена у 2018 році дипломом II ступеня на Всеукраїнському конкурсі студентських наукових робіт з галузі знань (спеціальності) "Математика та статистика. Прикладна математика (механіка)".

1 Консистентність оцінки найменших квадратів

Розглянемо модель спостережень

$$X(t_1, t_2) = g(t_1, t_2; \theta^0) + \varepsilon(t_1, t_2), \quad t = (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2_+, \tag{1.1}$$

де

$$g(t_1, t_2; \theta^0) = \sum_{k=1}^{N} (A_k^0 \cos(\lambda_k^0 t_1 + \mu_k^0 t_2) + B_k^0 \sin(\lambda_k^0 t_1 + \mu_k^0 t_2)), \tag{1.2}$$

$$\begin{aligned} \theta^0 = (\theta_1^0, \theta_2^0, \theta_3^0, \theta_4^0, ..., \theta_{4N-3}^0, \theta_{4N-2}^0, \theta_{4N-1}^0, \theta_{4N}^0) = \\ = (A_1^0, B_1^0, \lambda_1^0, \mu_1^0, ..., A_N^0, B_N^0, \lambda_N^0, \mu_N^0), \end{aligned} \tag{1.3}$$

число $N \geq 1$ є відомим; $(A_k^0)^2 + (B_k^0)^2 > 0$, $k = \overline{1, N}$, – вектор істинних значень невідомих параметрів; $\varepsilon = \{\varepsilon(t_1, t_2), (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2\}$ – задане на повному ймовірнісному просторі $(\Omega, \Im, \mathbb{P})$ випадкове поле, відносно якого припустимо таке.

N. ε – неперервне в середньому квадратичному та майже напевно (м. н.) однорідне гауссівське поле з нульовим середнім, коваріаційна функція якого $B(t_1, t_2) = \mathsf{E}\varepsilon(t_1, t_2)\varepsilon(0, 0)$, $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$, задовольняє одну з умов:

(i) поле ε є ізотропним та $B(t_1, t_2) = B(\|t\|) = L(\|t\|)\|t\|^{-\alpha}$, $\alpha \in (0, 1)$, де L – монотонно неспадна повільно змінна на нескінченності функція, $t = (t_1, t_2)$, $\|t\| = (t_1^2 + t_2^2)^{1/2}$.

(ii) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} |B(t_1, t_2)| dt_1 dt_2 < \infty$.

Функції регресії (1.2), як і класичні тригонометричні функції регресії ($\mu_k^0 = 0$, $k = \overline{1, N}$) при $N \geq 2$ не найкращим чином розрізняють параметри, у тому розумінні, що не задовольняють умови жодної загальної теореми про консистентність ОНК параметрів нелінійних моделей регресії (див., наприклад, [8, 23]). Таким чином, для доведення консистентності ОНК параметрів (1.3) треба допомогти тригонометричній функції регресії розрізняти параметри, обираючи, наприклад, для визначення ОНК таку параметричну множину, в якій параметри вже будуть добре розрізнятись.

Для точок (a, b), (c, d) на площині будемо писати $(a, b) < (c, d)$, якщо $a < c$, $b < d$. У цій роботі ми розглядаємо модель (1.1)–(1.3), в якій виконано наступне припущення.

R1. $(\lambda_k^0, \mu_k^0) < (\lambda_{k+1}^0, \mu_{k+1}^0)$, $k = \overline{1, N-1}$, і всі величини λ_j^0, μ_j^0, $i, j = \overline{1, N}$, — додатні та різні.

Це припущення означає, що параметричні множини, в яких перебувають значення параметрів $\lambda^0 = (\lambda_1^0, ..., \lambda_N^0)$, $\mu^0 = (\mu_1^0, ..., \mu_N^0)$ мають вигляд

$$\Lambda(\underline{\lambda}, \overline{\lambda}) = \{\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_N) \in \mathbb{R}^N : 0 \leq \underline{\lambda} < \lambda_1 < ... < \lambda_N < \overline{\lambda} < \infty\}, \quad (1.4)$$

$$M(\underline{\mu}, \overline{\mu}) = \{\mu = (\mu_1, ..., \mu_N) \in \mathbb{R}^N : 0 \leq \underline{\mu} < \mu_1 < \cdots < \mu_N < \overline{\mu} < \infty\}. \quad (1.5)$$

Позначимо

$$Q_T(\theta) = T^{-2} \int_0^T \int_0^T [X(t_1, t_2) - g(t_1, t_2; \theta)]^2 dt_1 dt_2. \quad (1.6)$$

За стандартним означенням ОНК параметра θ^0, отриманої за спостереженнями поля $X(t_1, t_2)$, $(t_1, t_2) = [0, T] \times [0, T]$, називається будь-який випадковий вектор

$$\theta_T = (A_{1T}, B_{1T}, \lambda_{1T}, \mu_{1T}, ..., A_{NT}, B_{NT}, \lambda_{NT}, \mu_{NT}), \quad (1.7)$$

що мінімізує функціонал (1.6) на параметричній множині $\Theta \subset \mathbb{R}^{4N}$, в якій A_k, B_k, $k = \overline{1, N}$, можуть набувати будь-яких значень, а λ, μ – у замкнених множинах $\Lambda^c(\underline{\lambda}, \overline{\lambda})$, $M^c(\underline{\mu}, \overline{\mu})$.

Нижче для отримання співвідношень (1.28), (1.29) та в подальших обчисленнях треба забезпечити збіжність м. н. до нуля при $T \to \infty$ величин

$$\frac{\sin T(\lambda_{kT} - \lambda_{jT})}{T(\lambda_{kT} - \lambda_{jT})}, \; \frac{\sin T(\mu_{kT} - \mu_{jT})}{T(\mu_{kT} - \mu_{jT})}, \; \frac{\sin T(\lambda_{kT} - \lambda_j^0)}{T(\lambda_{kT} - \lambda_j^0)},$$
$$\frac{\sin T(\mu_{kT} - \mu_j^0)}{T(\mu_{kT} - \mu_j^0)}, \; k \neq j; \; \frac{\sin T\lambda_{kT}}{T\lambda_{kT}}, \; \frac{\sin T\mu_{kT}}{T\mu_{kT}}, \; k = \overline{1, N}. \quad (1.8)$$

Однак, користуючись наведеним означенням оцінок $\lambda_T = (\lambda_{1T}, ..., \lambda_{NT})$, $\mu_T = (\mu_{1T}, ..., \mu_{NT})$, неможливо з'ясувати поведінку знаменників дробів (1.8) при $T \to \infty$.

А. М. Уолкер [17] свого часу запропонував у класичній задачі виявлення прихованих періодичностей таку модифікацію означення ОНК кутових частот, яка забезпечує і в нашій постановці задачі збіжність відношень (1.8) до нуля. Це надає можливість довести консистентність указаних оцінок. Сенс такої модифікації полягає в тому, що оцінка (1.7) визначається як точка мінімуму функціонала (1.6) на параметричній множині, що залежить від T і асимптотично при $T \to \infty$ добре розрізняє сукупності частот λ і μ.

Введемо дві монотонно неспадні сім'ї відкритих множин

$$\Lambda_T \subset \Lambda(\underline{\lambda}, \overline{\lambda}), \; M_T \subset M(\underline{\mu}, \overline{\mu}), \; T \geq T_0 > 0, \quad (1.9)$$

які містять істинні значення параметрів λ^0, μ^0, відповідно, та задовольняють наведені нижче умови.

R2.
$$\lim_{T\to\infty}\inf_{\substack{1\le j\le N-1\\ \lambda\in\Lambda_T}} T(\lambda_{j+1}-\lambda_j) = \lim_{T\to\infty}\inf_{\substack{1\le j\le N-1\\ \mu\in M_T}} T(\mu_{j+1}-\mu_j) = \infty, \quad (1.10)$$
$$\lim_{T\to\infty}\inf_{\lambda\in\Lambda_T} T\lambda_1 = \lim_{T\to\infty}\inf_{\mu\in M_T} T\mu_1 = \infty. \quad (1.11)$$

Умова (1.11) завжди виконується, коли $\underline{\lambda} > 0$, $\underline{\mu} > 0$. Якщо $\Lambda_T \subset \Lambda(0, \overline{\lambda})$, $M_T \subset M(0, \overline{\mu})$, то для виконання (1.10), (1.11) можна розглядати, наприклад, множини Λ_T, M_T такі, що

$$\inf_{\substack{1\le j\le N-1\\ \lambda\in\Lambda_T}} (\lambda_{j+1}-\lambda_j) = \inf_{\substack{1\le j\le N-1\\ \mu\in M_T}} (\mu_{j+1}-\mu_j) = \inf_{\lambda\in\Lambda_T} \lambda_1 = \inf_{\mu\in M_T} \mu_1 = T^{-1/2}. \quad (1.12)$$

Сенс припущень (1.10), (1.11) полягає в тому, щоб охопити випадок оцінювання близьких частот у сукупностях λ^0, μ^0 і близьких до нуля частот λ_1^0, μ_1^0.

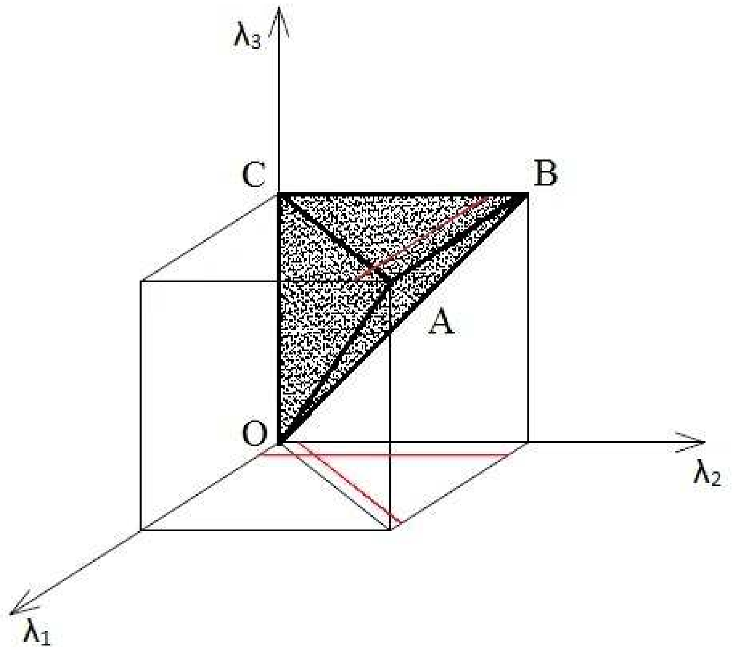

Рис. 2

На Рис. 2 зображено параметричну множину $\Lambda(0,1)$ $OCBA$ при $N = 3$: $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < 1$. Необхідно мати на увазі, що ми відділяємо деяку малу частину з бокових граней для розрізнення параметрів — від OCA для відокремлення λ_1 від λ_2; від OCB для відокремлення λ_1 від 0; від OAB для відокремлення λ_2 від λ_3.

Означення 1 *ОНК (в сенсі Уолкера) векторного параметра θ^0 вигляду (1.3) моделі (1.1), (1.2) назвемо будь-який випадковий вектор θ_T вигляду (1.7), що мінімізує функціонал (1.6) на множині параметрів $\Theta \subset \mathbb{R}^{4N}$, в якій амплітуди A_k, B_k, $k = \overline{1, N}$, можуть набувати довільних значень, а кутові частоти λ, μ – у замкнених множинах Λ_T^c, M_T^c.*

У подальшому тексті статті розглядається саме така ОНК θ_T параметра θ^0.

Наведена нижче лема узагальнює відповідний результат роботи [9]. Позначимо $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in \mathbb{R}^2$.

Лема 1 *Якщо виконано умову* $\mathbf{N}(i)$, *то для* $\rho < \alpha/6$

$$\xi(T) = \sup_{\varphi \in \mathbb{R}^2} T^{-2+\rho} \left| \int_0^T \int_0^T e^{-i(\varphi_1 t_1 + \varphi_2 t_2)} \varepsilon(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \right| \to 0 \text{ м. н.}, \ T \to \infty. \tag{1.13}$$

Доведення. Прості заміни змінних дозволяють записати

$$\left| \int_0^T \int_0^T e^{-i(\varphi_1 t_1 + \varphi_2 t_2)} \varepsilon(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \right|^2 = \int_0^T \int_0^T e^{-i\varphi_1(t_1 - s_1)} \times$$
$$\times \int_0^T \int_0^T e^{-i\varphi_2(t_2 - s_2)} \varepsilon(t_1, t_2) \varepsilon(s_1, s_2) dt_1 dt_2 ds_1 ds_2 = 2 \int_0^T \int_0^T \cos(\varphi_1 u_1 + \varphi_2 u_2) \times$$
$$\times \int_0^{T-u_1} \int_0^{T-u_2} \varepsilon(v_1, v_2) \varepsilon(v_1 + u_1, v_2 + u_2) dv_1 dv_2 du_1 du_2 + 2 \int_0^T \int_0^T \cos(\varphi_1 u_1 -$$
$$-\varphi_2 u_2) \int_0^{T-u_1} \int_0^{T-u_2} \varepsilon(v_1 + u_1, v_2) \varepsilon(v_1, v_2 + u_2) dv_1 dv_2 du_1 du_2.$$

Маємо далі

$$\mathsf{E}\, \xi^2(T) \leq$$
$$\leq 2T^{-4+2\rho} \int_0^T \int_0^T \mathsf{E} \left| \int_0^{T-u_1} \int_0^{T-u_2} \varepsilon(v_1, v_2) \varepsilon(v_1 + u_1, v_2 + u_2) dv_1 dv_2 \right| du_1 du_2 +$$
$$+2T^{-4+2\rho} \int_0^T \int_0^T \mathsf{E} \left| \int_0^{T-u_1} \int_0^{T-u_2} \varepsilon(v_1 + u_1, v_2) \varepsilon(v_1, v_2 + u_2) dv_1 dv_2 \right| du_1 du_2 \leq$$
$$\leq 2T^{-4+2\rho} \int_0^T \int_0^T \Psi_1^{1/2}(u_1, u_2) du_1 du_2 + 2T^{-4} \int_0^T \int_0^T \Psi_2^{1/2}(u_1, u_2) du_1 du_2,$$

де за формулою Ісерліса

$$\Psi_1(u_1, u_2) = \int_0^{T-u_1} \int_0^{T-u_2} \int_0^{T-u_1} \int_0^{T-u_2} \mathsf{E}\, \varepsilon(v_1 + u_1, v_2 + u_2) \varepsilon(v_1, v_2) \times$$
$$\times \varepsilon(w_1 + u_1, w_2 + u_2) \varepsilon(w_1, w_2) dv_1 dv_2 dw_1 dw_2 =$$
$$= (T - u_1)^2 (T - u_2)^2 B^2(u_1, u_2) +$$
$$+ \int_0^{T-u_1} \int_0^{T-u_2} \int_0^{T-u_1} \int_0^{T-u_2} B^2(v_1 - w_1, v_2 - w_2) dv_1 dv_2 dw_1 dw_2 +$$
$$+ \int_0^{T-u_1} \int_0^{T-u_2} \int_0^{T-u_1} \int_0^{T-u_2} B(v_1 - w_1 + u_1, v_2 - w_2 + u_2) \times$$

$$\times B(v_1 - w_1 - u_1, v_2 - w_2 - u_2) dv_1 dv_2 dw_1 dw_2 =$$
$$= \sum_{j=1}^{3} \Psi_{1j}(u_1, u_2);$$

$$\Psi_2(u_1,u_2) = \int_0^{T-u_1}\int_0^{T-u_2}\int_0^{T-u_1}\int_0^{T-u_2} \mathsf{E}\,\varepsilon(v_1+u_1,v_2)\varepsilon(v_1,v_2+u_2)\times$$
$$\times\varepsilon(w_1+u_1,w_2)\varepsilon(w_1,w_2+u_2)dv_1dv_2dw_1dw_2 =$$
$$= (T-u_1)^2(T-u_2)^2B^2(u_1,-u_2)+$$
$$+\int_0^{T-u_1}\int_0^{T-u_2}\int_0^{T-u_1}\int_0^{T-u_2} B^2(v_1-w_1,v_2-w_2)dv_1dv_2dw_1dw_2+$$
$$+\int_0^{T-u_1}\int_0^{T-u_2}\int_0^{T-u_1}\int_0^{T-u_2} B(v_1-w_1+u_1,v_2-w_2-u_2)\times$$
$$\times B(v_1-w_1-u_1,v_2-w_2+u_2)dv_1dv_2dw_1dw_2 =$$
$$= \sum_{j=1}^{3}\Psi_{2j}(u_1,u_2).$$

Оскільки

$$\Psi_i^{1/2}(u_1,u_2) \le \sum_{j=1}^{3}\Psi_{ij}^{1/2}(u_1,u_2),\ i=1,2,$$

то

$$\mathsf{E}\,\xi^2(T) \le \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} I_{ij}(T),\ I_{ij}(T) = 2T^{-4+2\rho}\int_0^T\int_0^T \Psi_{ij}^{1/2}(u_1,u_2)du_1du_2. \quad (1.14)$$

Оцінимо кожну величину $I_{ij}(T)$ окремо. Позначимо $b_u(v_1-w_1,v_2-w_2) = B(v_1-w_1+u_1,v_2-w_2+u_2)B(v_1-w_1-u_1,v_2-w_2-u_2)$ і запишемо

$$\Psi_{13}(u_1,u_2) = \int_0^{T-u_1}\int_0^{T-u_1}\int_0^{T-u_2}\int_0^{T-u_2} b(v_1-w_1,v_2-w_2)dv_1dw_1dv_2dw_2 =$$
$$= (T-u_1)(T-u_2)\int_{-(T-u_1)}^{T-u_1}\int_{-(T-u_2)}^{T-u_2}\left(1-\frac{|t_1|}{T-u_1}\right)\left(1-\frac{|t_2|}{T-u_2}\right)b_u(t_1,t_2)\times$$
$$\times dt_1dt_2 = T^2(T-u_1)(T-u_2)\int_{-(1-u_1T^{-1})}^{1-u_1T^{-1}}\int_{-(1-u_2T^{-1})}^{1-u_2T^{-1}}\left(1-\frac{|t_1|}{1-u_1T^{-1}}\right)\times$$
$$\times\left(1-\frac{|t_2|}{1-u_2T^{-1}}\right)b_u(Tt_1,Tt_2)dt_1dt_2 \le$$
$$\le T^2(T-u_1)(T-u_2)\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} b_u(Tt_1,Tt_2)dt_1dt_2 \le$$

$$\leq T^2(T-u_1)(T-u_2)\Bigg[B(0)\int_0^1\int_0^1 B(Tt_1+u_1,Tt_2+u_2)dt_1dt_2+$$

$$+B(0)\int_{-1}^0\int_{-1}^0 B(Tt_1-u_1,Tt_2-u_2)dt_1dt_2+$$

$$+\left(\int_0^1\int_{-1}^0+\int_{-1}^0\int_0^1\right)b_u(Tt_1,Tt_2)\Bigg]=$$

$$=T^2(t-u_1)(T-u_2)\sum_{k=1}^4\Psi_{13}^{(k)}(u_1,u_2).$$

За умови леми $\Psi_{13}^{(1)}=\Psi_{13}^{(2)}$, $\Psi_{13}^{(3)}=\Psi_{13}^{(4)}$, і тому ми оцінимо $\Psi_{13}^{(1)}$ та $\Psi_{13}^{(3)}$. Оскільки $\|Tt\pm u\|\leq 2\sqrt{2}\,T$, то для довільного $\varepsilon>0$ при достатньо великих T (нехай при $T>T_0$), завдяки монотонності L, отримуємо $L\left(\|Tt\pm u\|\right)\leq(1+\varepsilon)L(T)$. З іншого боку,

$$\|Tt+u\|^\alpha\geq T^\alpha t_1^\alpha, \tag{1.15}$$

$$\Psi_{13}^{(1)}\leq(1+\varepsilon)(1-\alpha)^{-1}B(0)B(T),\ T>T_0. \tag{1.16}$$

Переходячи до оцінки $\Psi_{13}^{(3)}$, зауважимо, що для 1-го множника $b_u(Tt_1,Tt_2)$ є правильною оцінка (1.15), а для 2-го – оцінка

$$\|Tt-u\|^\alpha\geq T^\alpha t_2^\alpha, \tag{1.17}$$

тобто

$$\Psi_{13}^3\leq(1+\varepsilon)^2(1-\alpha)^{-2}B^2(T),\ T>T_0, \tag{1.18}$$

та для тих самих T

$$I_{13}(T)\leq\frac{8}{9}\sqrt{2}\times$$

$$\times\Big((1+\varepsilon)^{1/2}(1-\alpha)^{-1/2}B^{1/2}(0)B^{1/2}(T)+(1+\varepsilon)(1-\alpha)^{-1}B(T)\Big)T^{2\rho}. \tag{1.19}$$

Міркуючи аналогічно, отримуємо оцінки

$$\Psi_{12}(u_1,u_2)\leq 4B(0)T^2(T-u_1)(T-u_2)\int_0^1\int_0^1 B(Tt_1,Tt_2)dt_1dt_2,$$

$$I_{12}(T)\leq\frac{16}{9}(1+\varepsilon)^{1/2}(1-\alpha)^{-1/2}B^{1/2}(0)B^{1/2}(T)T^{2\rho}. \tag{1.20}$$

Крім цього, для $T>T_0$

$$I_{11}(T)\leq 2T^{-4+2\rho}\int_0^T\int_0^T(T-u_1)(T-u_2)B(u_1,u_2)du_1du_2\leq$$

$$\leq T^{2\rho}\int_0^1\int_0^1 B(Tu_1,Tu_2)du_1du_2\leq 2(1+\varepsilon)(1-\alpha)^{-1}B(T)T^{2\rho}. \tag{1.21}$$

Таким чином, із (1.19)-(1.21) випливає, що при $T \to \infty$

$$\sum_{j=1}^{3} I_{1j} = O(B^{1/2}(T)T^{2\rho}). \tag{1.22}$$

Позначимо

$$c_u(v_1 - w_1, v_2 - w_2) = B(v_1 - w_1 + u_1, v_2 - w_2 - u_2)B(v_1 - w_1 - u_1, v_2 - w_2 + u_2).$$

Аналогічно оцінці для $\Psi_{13}(u_1, u_2)$ отримуємо

$$\Psi_{23}(u_1, u_2) \le T^2(T - u_1)(T - u_2)\left(\int_0^1\int_0^1 + \int_{-1}^0\int_{-1}^0 + \int_0^1\int_{-1}^0 + \int_{-1}^0\int_0^1\right)\times$$

$$\times c_u(Tt_1, Tt_2)dt_1dt_2 = T^2(T - u_1)(T - u_2)\sum_{k=1}^{4}\Psi_{23}^{(k)}(u_1, u_2).$$

Зауважимо, що за умови леми

$$\Psi_{23}^{(1)} = \Psi_{23}^{(2)} = \Psi_{13}^{(3)} = \Psi_{13}^{(4)},\ \Psi_{23}^{(3)} = \Psi_{23}^{(4)} = \Psi_{13}^{(1)} = \Psi_{13}^{(2)}.$$

Крім цього, $\Psi_{21} = \Psi_{11}$, $\Psi_{22} = \Psi_{12}$. Це означає, що при $T \to \infty$

$$\sum_{j=1}^{3} I_{2j} = O(B^{1/2}(T)T^{2\rho}). \tag{1.23}$$

Співвідношення (1.22), (1.23) разом із (1.15) показують, що при $T \to \infty$

$$\mathsf{E}\,\xi^2(T) = O(L^{1/2}(T)T^{-\alpha/2+2\rho}). \tag{1.24}$$

Нехай $T_n = n^\beta$, де число $\beta > 0$ задовольняє співвідношення $\left(\frac{\alpha}{2} - 2\rho\right)\beta = 1 + \delta$ для деякого $\delta > 0$. Тоді $\sum_{n=1}^{\infty}\mathsf{E}\,\xi^2(T_n) < \infty$, тобто $\xi(T_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ м. н. Розглянемо послідовність випадкових величин

$$\zeta_n = \sup_{T_n \le T \le T_{n+1}} |\xi(T) - \xi(T_n)| \le$$

$$\le \sup_{T_n \le T \le T_{n+1}} \sup_{\varphi\in\mathbb{R}^2}\left|T^{-2+\rho}\int_0^T\int_0^T e^{-i(\varphi_1 t_1 + \varphi_2 t_2)}\varepsilon(t_1, t_2)dt - \right.$$

$$\left. -T_n^{-2+\rho}\int_0^{T_n}\int_0^{T_n} e^{-i(\varphi_1 t_1 + \varphi_2 t_2)}\varepsilon(t_1, t_2)dt\right| \le$$

$$\le \left(\frac{T_{n+1}^{2-\rho}}{T_n^{2-\rho}} - 1\right)\xi(T_n) + T_n^{-2+\rho}\left(\int_{T_n}^{T_{n+1}}\int_0^{T_n} + \int_0^{T_n}\int_{T_n}^{T_{n+1}} + \int_{T_n}^{T_{n+1}}\int_{T_n}^{T_{n+1}}\right)\times$$

$$\times|\varepsilon(t_1, t_2)|dt_1dt_2 = \sum_{i=1}^{4}\zeta_n^{(i)}.$$

Очевидно, $\zeta_n^{(1)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ м. н. Для $k \in \mathbb{N}$ розглянемо

$$\mathsf{E}\left(\zeta_n^{(2)}\right)^{2k} = T_n^{-2k(2-\rho)} \int_{T_n}^{T_{n+1}} \int_0^{T_n} \overset{2k}{\cdots} \int_{T_n}^{T_{n+1}} \int_0^{T_n} \mathsf{E} \prod_{j=1}^{2k} |\varepsilon(t_1^{(j)}, t_2^{(j)})| \prod_{j=1}^{2k} dt_1^{(j)} dt_2^{(j)} \leq$$
$$\leq (2k-1)!!B^k(0) T_n^{-2k(2-\rho)} (T_{n+1} - T_n)^{2k} T_n^{2k} =$$
$$= (2k-1)!!B^k(0) \left(\frac{T_{n+1}}{T_n} - 1\right)^{2k} T_n^{2k\rho} = O(n^{-2k(1-\beta\rho)}),\ n \to \infty.$$

Якщо $\beta\rho < 1$, то вибором k можна забезпечити збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{E}(\zeta_n^{(2)})^{2k} < \infty$, і $\zeta_n^{(2)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ м. н. Маємо $\beta\rho = \frac{\rho(1+\delta)}{\alpha/2-2\rho} < 1$, або $\rho < \frac{\alpha}{2(3+\delta)}$. Оскільки $\delta > 0$ може бути як завгодно малим, то умова леми $\rho < \alpha/6$ забезпечує потрібну збіжність $\zeta_n^{(2)}$ як і збіжність $\zeta_n^{(3)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ м. н. Оскільки

$$\mathsf{E}\left(\zeta_n^{(4)}\right)^2 \leq (2k-1)!!B^k(0) \left(\frac{T_{n+1}}{T_n} - 1\right)^{4k} T_n^{2k\rho} =$$
$$= O(n^{-2k(2-\beta\rho)}),\ n \to \infty,$$

то і $\zeta_n^{(4)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ м. н. Лему 1 доведено. □

Лема 2 *Якщо виконано умову* $\mathbf{N}(ii)$, *то* $\xi(T) \to 0$ *м. н. при* $T \to \infty$ *для* $\rho < 1/3$.

Доведення. Використовуючи позначення леми 1 та умову леми 2, отримуємо для $i = 1, 2$

$$I_{i1}(T) = O(T^{-2+2\rho}),\ I_{i2}(T) = O(T^{-1+2\rho}),\ I_{i3}(T) = O(T^{-1+2\rho}),\ T \to \infty. \tag{1.25}$$

Нехай $T_n = n^\beta$, де $(1-2\rho)\beta = 1+\delta,\ \delta > 0$. Тоді, як і в лемі 1, $\xi(T_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ м. н., $\zeta_n = \sum_{i=1}^4 \zeta_n^{(i)}$. Тоді $\zeta_n^{(1)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ м. н., а умова леми $\rho < 1/3$, як і в доведенні леми 1, забезпечує збіжність $\zeta_n^{(i)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ м. н., $i = 2, 3, 4$. □

Теорема 1 *Якщо виконано умови* **N**, **R1**, **R2**, *то ОНК в сенсі Уолкера* θ_T *є сильно консистентною оцінкою параметра* θ^0, *а саме:* $A_{kT} \to A_k^0,\ B_{kT} \to B_k^0,\ T(\lambda_{kT} - \lambda_k^0) \to 0,\ T(\mu_{kT} - \mu_k^0) \to 0$ *м. н. при* $T \to \infty,\ k = \overline{1, N}$.

Доведення. Розглянемо систему лінійних рівнянь відносно ОНК $A_{kT},\ B_{kT},\ k=\overline{1,N}$:

$$\left.\frac{\partial Q_T(\theta)}{\partial A_p}\right|_{\theta=\theta_T}=\left.\frac{\partial Q_T(\theta)}{\partial B_p}\right|_{\theta=\theta_T}=0,\ p=\overline{1,N},$$

яку можна переписати у вигляді

$$\begin{cases}\sum_{k=1}^N a_{kp}^{(1)}A_{kT}+\sum_{k=1}^N b_{kp}^{(1)}B_{kT}=c_p^{(1)},\ p=\overline{1,N};\\ \sum_{k=1}^N a_{kp}^{(2)}A_{kT}+\sum_{k=1}^N b_{kp}^{(2)}B_{kT}=c_p^{(2)},\ p=\overline{1,N}.\end{cases} \tag{1.26}$$

Позначимо

$$\begin{gathered}\cos(\lambda_{kT}t_1+\mu_{kT}t_2)=\cos_k,\ \sin(\lambda_{kT}t_1+\mu_{kT}t_2)=\sin_k,\\ \cos(\lambda_k^0t_1+\mu_k^0)=\cos_k^0,\ \sin(\lambda_k^0t_1+\mu_k^0)=\sin_k^0,\ k=\overline{1,N}.\end{gathered} \tag{1.27}$$

Тоді коефіцієнти системи (1.26) можна записати у вигляді

$$\begin{gathered}a_{kp}^{(1)}=T^{-2}\int_0^T\int_0^T\cos_k\cos_p dt_1dt_2,\ a_{kp}^{(2)}=T^{-2}\int_0^T\int_0^T\cos_k\sin_p dt_1dt_2,\\ b_{kp}^{(1)}=T^{-2}\int_0^T\int_0^T\sin_k\cos_p dt_1dt_2,\ b_{kp}^{(2)}=T^{-2}\int_0^T\int_0^T\sin_k\sin_p dt_1dt_2,\\ c_p^{(1)}=T^{-2}\int_0^T\int_0^T X(t_1,t_2)\cos_p dt_1dt_2,\ c_{kp}^{(2)}=T^{-2}\int_0^T\int_0^T X(t_1,t_2)\sin_p dt_1dt_2.\end{gathered}$$

Позначимо також $o(1)$, узагалі кажучи, різні випадкові процеси, що залежать від параметра T та прямують до нуля м. н. при $T\to\infty$.

Беручи до уваги властивості (1.10), (1.11) параметричних множин $\Lambda_T,\ M_T$, у замиканнях яких набувають значення оцінки $\lambda_T,\ \mu_T$, елементарними обчисленнями знаходимо

$$a_{kp}^{(1)}=o(1),\ k\neq p,\ a_{pp}^{(1)}=\frac{1}{2}+o(1),\ a_{kp}^{(2)}=o(1),\ k,p=\overline{1,N}; \tag{1.28}$$

$$b_{kp}^{(1)}=a_{pk}^{(2)}=o(1),\ b_{kp}^{(2)}=o(1),\ k\neq p,\ b_{kp}^{(2)}=\frac{1}{2}+o(1),\ k,p=\overline{1,N}. \tag{1.29}$$

Для подальших обчислень позначимо

$$\begin{gathered}x_{\lambda p}=\frac{\sin T(\lambda_{pT}-\lambda_p^0)}{T(\lambda_{pT}-\lambda_p^0)},\ x_{\mu p}=\frac{\sin T(\mu_{pT}-\mu_p^0)}{T(\mu_{pT}-\mu_p^0)},\ p=\overline{1,N};\\ y_{\lambda p}=\frac{1-\cos T(\lambda_{pT}-\lambda_p^0)}{T(\lambda_{pT}-\lambda_p^0)},\ y_{\mu p}=\frac{1-\cos T(\mu_{pT}-\mu_p^0)}{T(\mu_{pT}-\mu_p^0)},\ p=\overline{1,N}.\end{gathered} \tag{1.30}$$

Запишемо

$$c_p^{(1)} = T^{-2}\int_0^T\int_0^T \varepsilon(t_1,t_2)\cos_p dt_1dt_2 + T^{-2}\int_0^T\int_0^T g(t_1,t_2;\theta^0)\cos_p dt_1dt_2 =$$
$$= \frac{1}{2}\left[A_p^0(x_{\lambda p}x_{\mu p} - y_{\lambda p}y_{\mu p}) - B_p^0(x_{\mu p}y_{\lambda p} + x_{\lambda p}y_{\mu p})\right] + o(1) \qquad (1.31)$$

за лемами 1 і 2 та стандартними обчисленнями. Аналогічно

$$c_p^{(2)} = \frac{1}{2}\left[A_p^0(x_{\mu p}y_{\lambda p} + x_{\lambda p}y_{\mu p}) + B_p^0(x_{\lambda p}x_{\mu p} - y_{\lambda p}y_{\mu p})\right] + o(1). \qquad (1.32)$$

Оскільки $|x_{\lambda p}|, |x_{\mu p}|, |y_{\lambda p}|, |y_{\mu p}| \le 1,\ p = \overline{1,N}$, то завдяки співвідношенням (1.28), (1.29), (1.31), (1.32), розв'язок системи (1.26) можна записати у вигляді

$$A_{pT} = A_p^0(x_{\lambda p}x_{\mu p} - y_{\lambda p}y_{\mu p}) - B_p^0(x_{\mu p}y_{\lambda p} + x_{\lambda p}y_{\mu p}) + o(1),$$
$$B_{pT} = A_p^0(x_{\mu p}y_{\lambda p} + x_{\lambda p}y_{\mu p}) + B_p^0(x_{\lambda p}x_{\mu p} - y_{\lambda p}y_{\mu p}) + o(1),\ p = \overline{1,N}. \qquad (1.33)$$

У свою чергу, із (1.33) випливають нерівності

$$|A_{pT}|,\ |B_{pT}| \le 2\left(|A_p^0| + |B_p^0|\right) + o(1),\ p = \overline{1,N}. \qquad (1.34)$$

Позначимо

$$G_T(\theta_1;\theta_2) = T^{-2}\int_0^T\int_0^T \left[g(t_1,t_2;\theta_1) - g(t_1,t_2;\theta_2)\right]^2 dt_1dt_2.$$

За означенням ОНК

$$0 \ge Q_T(\theta_T) - Q_T(\theta^0) = G_T(\theta_T;\theta^0) +$$
$$+ 2T^{-2}\int_0^T\int_0^T \varepsilon(t_1,t_2)\left(g(t_1,t_2;\theta^0) - g(t_1,t_2;\theta_T)\right)dt_1dt_2. \qquad (1.35)$$

За доведеними лемами та (1.34) другий доданок правої частини рівності (1.35) є величиною $o(1)$. Це означає, що

$$G_T(\theta_T;\theta^0) \to 0 \text{ м. н.}, T \to \infty. \qquad (1.36)$$

Запишемо вираз для $G_T(\theta_T;\theta^0)$ таким чином, щоб із (1.36) випливала консистентність ОНК параметрів $\lambda_k^0,\ \mu_k^0,\ k = \overline{1,N}$. Маємо

$$G_T(\theta_T;\theta^0) = T^{-2}\int_0^T\int_0^T g^2(t_1,t_2;\theta_T)dt_1dt_2 + T^{-2}\int_0^T\int_0^T g^2(t_1,t_2;\theta^0)dt_1dt_2 -$$
$$-2T^{-2}\int_0^T\int_0^T g(t_1,t_2;\theta_T)g(t_1,t_2;\theta^0)dt_1dt_2 = J_1 + J_2 + J_3.$$

Із використанням (1.34) та співвідношень (1.28), (1.29) отримуємо

$$J_1 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\left(A_{kT}^2 + B_{kT}^2\right) + o(1), \tag{1.37}$$

$$J_2 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\left((A_k^0)^2 + (B_k^0)^2\right) + o(1), \tag{1.38}$$

$$J_3 = -2\sum_{p=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}T^{-2}\int_0^T\int_0^T\left(A_{pT}A_k^0\cos_p\cos_k^0 + A_{pT}B_k^0\cos_p\sin_k^0\right)dt_1dt_2 -$$

$$-2\sum_{p=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}T^{-2}\int_0^T\int_0^T\left(B_{pT}A_k^0\sin_p\cos_k^0 + B_{pT}B_k^0\sin_p\sin_k^0\right)dt_1dt_2 =$$

$$= \sum_{p=1}^{N}\left(A_{pT}A_p^0(x_{\lambda p}x_{\mu p} - y_{\lambda p}y_{\mu p}) - A_{pT}B_p^0(x_{\mu p}y_{\lambda p} + x_{\lambda p}y_{\mu p})\right) -$$

$$-\sum_{p=1}^{N}\left(B_{pT}A_p^0(x_{\mu p}y_{\lambda p} + x_{\lambda p}y_{\mu p}) + B_{pT}B_p^0(x_{\lambda p}x_{\mu p} - y_{\lambda p}y_{\mu p})\right) + o(1). \tag{1.39}$$

Позначимо $z_{1p} = x_{\lambda p}x_{\mu p} - y_{\lambda p}y_{\mu p}$, $z_{2p} = x_{\mu p}y_{\lambda p} + x_{\lambda p}y_{\mu p}$, $p = \overline{1, N}$, і підставимо у (1.37) та (1.39) вирази (1.33). Тоді

$$G_T(\theta_T;\theta^0) = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{N}\left[(A_p^0z_{1p} - B_p^0z_{2p})^2 + (A_p^0z_{2p} + B_p^0z_{1p})^2 + (A_p^0)^2 + (B_p^0)^2\right] -$$

$$-\sum_{p=1}^{N}\left[(A_p^0)^2z_{1p}^2 - 2A_p^0B_p^0z_{1p}z_{2p} + (B_p^0)^2z_{2p}^2\right] -$$

$$-\sum_{p=1}^{N}\left[(A_p^0)^2z_{2p}^2 + 2A_p^0B_p^0z_{1p}z_{2p} + (B_p^0)^2z_{1p}^2\right] + o(1) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{N}\left((A_p^0)^2 + (B_p^0)^2\right)\left(1 - z_{1p}^2 - z_{2p}^2\right) + o(1) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{N}\left((A_p^0)^2 + (B_p^0)^2\right)\left(1 - (x_{\lambda p}^2 + y_{\lambda p}^2)(x_{\mu p}^2 + y_{\mu p}^2)\right) + o(1) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{N}\left((A_p^0)^2 + (B_p^0)^2\right)\left[1 - \left(\frac{\sin\frac{1}{2}T(\lambda_{pT} - \lambda_p^0)}{\frac{1}{2}T(\lambda_{pT} - \lambda_p^0)}\right)^2\left(\frac{\sin\frac{1}{2}T(\mu_{pT} - \mu_p^0)}{\frac{1}{2}T(\mu_{pT} - \mu_p^0)}\right)^2\right] +$$

$$+o(1). \tag{1.40}$$

Рівність (1.40) разом із (1.36) доводять, що $T(\lambda_{pT} - \lambda_p^0) \to 0,\ T(\mu_{pT} - \mu_p^0) \to 0$ м. н., $T \to \infty,\ p = \overline{1, N}$. Тепер із (1.30) випливає, що $x_{\lambda p},\ x_{\mu p} \to 1,\ y_{\lambda p},\ y_{\mu p} \to 0$ м. н., $T \to \infty,\ p = \overline{1, N}$, а з (1.33) отримуємо $A_{pT} \to A_p^0,\ B_{pT} \to B_p^0$. Теорему доведено. $\square$

2 Теорема редукції

Розглянемо модель регресії

$$X(t_1,t_2) = g(t_1,t_2;\theta) + \varepsilon(t_1,t_2), (t_1,t_2) \in [0,T]^2, \tag{2.1}$$

де $g : [0;\infty)^2 \times \Theta_\gamma \to \mathbb{R}^2$ неперервна функція, $\Theta_\gamma = \bigcup_{\|a\|<1}(\Theta + \gamma a), \gamma > 0$ - деяке число, $\Theta \subset \mathbb{R}^q$ - відкрита множина, що містить в собі монотонно неспадну сім'ю відкритих опуклих множин $\Theta_T \subset \Theta, T > T_0 > 0$, істинне значення параметра $\theta \in \Theta_T, T > T_0$. Припускаємо також, що випадковий шум $\varepsilon(t_1,t_2)$ задовольняє умовам **N**.

Позначимо $Q_T(\tau) = T^{-2}\int_0^T\int_0^T [X(t_1,t_2) - g(t_1,t_2;\tau)]^2 dt_1 dt_2$ та припустимо, що $\inf_{\tau\in\Theta_T^c} Q_T(\tau)$ досягається в множинах $\Theta_T^c, T > T_0$, для кожного $\omega \in \Omega$.

Означення 2 *ОНК невідомого параметра $\theta = (\theta_1,...,\theta_q) \in \Theta_T, T > T_0$, моделі спостережень (2.1) називається будь-який вектор $\hat{\theta_T} = (\hat{\theta}_1,...,\hat{\theta}_q) \in \Theta_T^c$, для якого*

$$Q_T(\hat{\theta_T}) = \inf_{\tau\in\Theta_T^c} Q_T(\tau).$$

Зауважимо, що існування хоча б одного такого випадкового вектора випливає із Теореми (3.10), стор. 270, роботи І. Пфанцагля [24].

Припустимо, що $g(t_1,t_2;\cdot) \in C^2(\Theta_\gamma)$ для кожного $(t_1,t_2) \in \mathbb{R}_+^2$. Позначимо

$$g_i(t_1,t_2;\tau) = \frac{\partial}{\partial\tau_i} g(t_1,t_2;\tau),\ g_{il}(t_1,t_2;\tau) = \frac{\partial^2}{\partial\tau_i\partial\tau_l} g(t_1,t_2;\tau),\ i,l = \overline{1,q},$$

$$d_T^2(\theta) = diag(d_{iT}^2(\theta))_{i=1}^q,$$

$$d_{iT}^2(\theta) = \int_0^T\int_0^T g_i^2(t_1,t_2;\theta)dt_1dt_2,\ \underline{lim}_{T\to\infty} T^{-2} d_{iT}^2(\theta) > 0,\ i = \overline{1,q},$$

$$d_{il,T}^2(\theta) = \int_0^T\int_0^T g_{il}^2(t_1,t_2;\theta)dt_1dt_2,\ \theta \in \Theta_T^c,\ i,l = \overline{1,q}.$$

Розглянемо нормовану ОНК

$$\hat{u}_T = \hat{u}_T(\theta) = d_T(\theta)\big(\hat{\theta}_T - \theta\big). \tag{2.2}$$

Зробимо заміну змінних $u = d_T(\theta)(\tau - \theta)$, яка відповідає нормуванню (2.2), у функції регресії та її похідних, тобто

$$g(t_1,t_2;\tau) = g(t_1,t_2;\theta + d_T^{-1}(\theta)u) = h(t_1,t_2;u),$$
$$g_i(t_1,t_2;\tau) = g_i(t_1,t_2;\theta + d_T^{-1}(\theta)u) = h_i(t_1,t_2;u),$$
$$g_{il}(t_1,t_2;\tau) = g_{il}(t_1,t_2;\theta + d_T^{-1}(\theta)u) = h_{il}(t_1,t_2;u),\ i,l = \overline{1,q}.$$

Позначимо $V(R) = \{u \in \mathbb{R}^q : \|u\| < R\}$. Буквами k позначатимемо додатні константи. Припускаємо, що для $R \geq 0$, всіх достатньо великих $T (T > T_0(R))$ та істинного значення параметра θ виконується умова

R3.

$$(i) \qquad \sup_{(t_1,t_2)\in[0,T]^2,\, u\in V^c(R)} \frac{|h_i(t_1,t_2;u)|}{d_{iT}(\theta)} \leq k_i(R)T^{-1},\ i=\overline{1,q}; \tag{2.3}$$

$$(ii) \quad \sup_{(t_1,t_2)\in[0,T]^2,\, u\in V^c(R)} \frac{|h_{il}(t_1,t_2;u)|}{d_{il,T}(\theta)} \leq k_{il}(R)T^{-1},\ i,l=\overline{1,q}; \tag{2.4}$$

$$(iii) \qquad \frac{d_{il,T}(\theta)}{d_{iT}(\theta)d_{iT}(\theta)} \leq \tilde{k}_{il}T^{-1},\ i,l=\overline{1,q}. \tag{2.5}$$

Позначимо також

$$H(t_1,t_2;u_1,u_2) = h(t_1,t_2;u_1) - h(t_1,t_2;u_2),$$
$$H_i(t_1,t_2;u_1,u_2) = h_i(t_1,t_2;u_1) - h_i(t_1,t_2;u_2),\ i=\overline{1,q}.$$

Введемо векторнозначні функції

$$\Psi_T(u) = (\Psi_T^i(u))_{i=1}^q,\ \Psi_T^i(u) = \int_0^T\int_0^T \varepsilon(t_1,t_2)\frac{h_i(t_1,t_2;u)}{d_{iT}(\theta)}dt_1dt_2 +$$
$$+ \int_0^T\int_0^T H(t_1,t_2;0,u)\frac{h_i(t_1,t_2;u)}{d_{iT}(\theta)}dt_1dt_2,\ i=\overline{1,q}, \tag{2.6}$$

та

$$L_T(u) = (L_T^i(u))_{i=1}^q,$$
$$L_T^i(u) = \int_0^T\int_0^T \Big(\varepsilon(t_1,t_2) - \sum_{l=1}^q \frac{g_l(t_1,t_2;\theta)}{d_{lT}(\theta)}u_l\Big)\frac{g_i(t_1,t_2;\theta)}{d_{iT}(\theta)}dt_1dt_2,\ i=\overline{1,q}. \tag{2.7}$$

Вектор $\Psi_T(u)$ визначено для $u \in U_T^c(\theta),\ U_T(\theta) = d_T(\theta)(\Theta_T - \theta)$.

За нашими припущеннями множина $U_T(\theta)$ розширюється до $\mathbb{R}^q$ при $T \to \infty$. Тоді для будь-якого $R > 0$ $V^c(R) \subset U_T(\theta)$ для $T > T_0(R)$. Вектор $L_T(u)$ визначено для $u \in \mathbb{R}^q$.

Легко зрозуміти статистичний зміст векторів $\Psi_T(u)$ та $L_T(u)$.

ОНК $\hat{u}_T$ задовольняє системі нормальних рівнянь

$$\Psi_T(u) = 0. \tag{2.8}$$

Вектор $L_T(u)$ відповідає віртуальній лінійній регерсійній моделі з невідомим параметром $\beta = (\beta_1, ...\beta_q)$

$$Z(t_1,t_2) = \sum_{i=1}^q g_i(t_1,t_2;\theta)\beta_i + \varepsilon(t_1,t_2),\ (t_1,t_2) \in [0,T]^2, \tag{2.9}$$

і система нормальних рівнянь

$$L_T(u) = 0 \tag{2.10}$$

задає нормовану ОНК $\tilde{u}_T$ параметра $\beta \in \mathbb{R}^q$, якщо ми запишемо

$$\tilde{u}_T = \tilde{u}_T(\theta) = d_T(\theta)\big(\tilde{\beta}_T - \beta\big). \tag{2.11}$$

$\tilde{\beta}_T$ - стандартна ОНК параметра β моделі (2.9).

Теорема 2 *Якщо виконуються умови* **N** *та* **R3***, то для довільних* $R > 0,\ r > 0$

$$P\left\{\sup_{u \in V^c(R)} \|\Psi_T(u) - L_T(u)\| > r\right\} \to 0, T \to \infty. \tag{2.12}$$

Доведення. Для $i = \overline{1, q}$

$$\Psi_T^i(u) - L_T^i(u) = \int_0^T \int_0^T \varepsilon(t_1, t_2) \frac{h_i(t_1, t_2; u)}{d_{iT}(\theta)} dt_1 dt_2 + \int_0^T \int_0^T H(t_1, t_2; 0, u) \times$$
$$\times \frac{h_i(t_1, t_2; u)}{d_{iT}(\theta)} dt_1 dt_2 - \int_0^T \int_0^T \varepsilon(t_1, t_2) \frac{g_i(t_1, t_2; \theta)}{d_{iT}(\theta)} dt_1 dt_2 + \int_0^T \int_0^T \frac{g_i(t_1, t_2; \theta)}{d_{iT}(\theta)} \times$$
$$\times \sum_{l=1}^q \frac{g_l(t_1, t_2; \theta)}{d_{lT}(\theta)} u_l dt_1 dt_2 = \int_0^T \int_0^T \varepsilon(t_1, t_2) \frac{H_i(t_1, t_2; u, 0)}{d_{iT}(\theta)} dt_1 dt_2 +$$
$$+ \int_0^T \int_0^T H(t_1, t_2; 0, u) \frac{H_i(t_1, t_2; u, 0)}{d_{iT}(\theta)} dt_1 dt_2 + \int_0^T \int_0^T \frac{g_i(t_1, t_2; \theta)}{d_{iT}(\theta)} \times$$
$$\times \left[H(t_1, t_2; 0, u) + \sum_{l=1}^q \frac{g_l(t_1, t_2; \theta)}{d_{lT}(\theta)} u_l\right] dt_1 dt_2 = I_1(u) + I_2(u) + I_3(u). \tag{2.13}$$

Нехай $u \in V^c(R)$ фіксовано. Маємо

$$\mathsf{E}\, I_1^2(u) = \mathsf{E}\left(\int_0^T \int_0^T \varepsilon(t_1, t_2) \frac{H_i(t_1, t_2; u, 0)}{d_{iT}(\theta)} dt_1 dt_2\right)^2 =$$
$$= \int_0^T \int_0^T \int_0^T \int_0^T \frac{H_i(t_1, t_2; u, 0)}{d_{iT}(\theta)} \frac{H_i(v_1, v_2; u, 0)}{d_{iT}(\theta)} \mathsf{E}\, \varepsilon(t_1, t_2) \varepsilon(v_1, v_2) dt_1 dt_2 dv_1 dv_2 \le$$
$$\le \sup_{(t_1, t_2) \in [0, T]^2} \frac{H_i^2(t_1, t_2; u, 0)}{d_{iT}^2(\theta)} \int_0^T \int_0^T \int_0^T \int_0^T \Big| \mathsf{E}\, \varepsilon(t_1, t_2) \varepsilon(v_1, v_2) \Big| dt_1 dt_2 dv_1 dv_2. \tag{2.14}$$

Використовуючи формулу Лагранжа та умову **R3**, отримуємо

$$\sup_{(t_1,t_2)\in[0,T]^2}\frac{H_i(t_1,t_2;u,0)}{d_{iT}(\theta)} \le \left[\sum_{l=1}^{q}\sup_{(t_1,t_2)\in[0,T]^2,\,u\in V^c(R)}\frac{|h_{il}(t_1,t_2;u)|}{d_{iT}(\theta)d_{lT}(\theta)}|u_l|\right] =$$

$$= \left[\sum_{l=1}^{q}\sup_{(t_1,t_2)\in[0,T]^2,\,u\in V^c(R)}\frac{|h_{il}(t_1,t_2;u)|}{d_{il,T}(\theta)}\frac{d_{il,T}(\theta)}{d_{iT}(\theta)d_{lT}(\theta)}|u_l|\right] \le R\left(\sum_{l=1}^{q}k_{il}(R)\tilde{k}_{il}\right)T^{-2}. \tag{2.15}$$

Нехай виконано умову **N(ii)**. Тоді

$$\mathsf{E}\, I_1^2(u) \le$$

$$\le R^2\left(\sum_{l=1}^{q}k_{il}(R)\tilde{k}_{il}\right)^2 T^{-4}\int_0^T\int_0^T\int_0^T\int_0^T\Big|\mathsf{E}\,\varepsilon(t_1,t_2)\varepsilon(v_1,v_2)\Big|dt_1dt_2dv_1dv_2.$$

За умови **N** $|\mathsf{E}\,\varepsilon(t_1,t_2)\varepsilon(v_1,v_2)| = |B(t_1-v_1,t_1-v_2)|$, маємо

$$\Gamma(T) = T^{-4}\int_0^T\int_0^T\int_0^T\int_0^T|B(t_1-v_1,t_1-v_2)|dt_1dt_2dv_1dv_2 =$$

$$= T^{-2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}\Big(1-\frac{|t_1|}{T}\Big)\Big(1-\frac{|t_2|}{T}\Big)|B(t_1,t_2)|dt_1dt_2 = T^{-2}\int_{\mathbb{R}^2}B_T(t_1,t_2)dt_1dt_2,$$

де

$$B_T(t_1,t_2) = \begin{cases}\Big(1-\frac{|t_1|}{T}\Big)\Big(1-\frac{|t_2|}{T}\Big)|B(t_1,t_2)|, & (t_1,t_2)\in[-T,T]\times[-T,T];\\ 0, & (t_1,t_2)\in\mathbb{R}^2\setminus[-T,T]\times[-T,T].\end{cases}$$

Очевидно, $B_T(t_1,t_2)\to|B(t_1,t_2)|,\ T\to\infty,\ (t_1,t_2)\in\mathbb{R}^2$. Крім цього, $B_T(t_1,t_2)\le|B(t_1,t_2)|,\ T>0,\ (t_1,t_2)\in\mathbb{R}^2$. За теоремою Лебега про мажоровану збіжність $\Gamma(T)\to\int_{\mathbb{R}^2}|B(t_1,t_2)|dt_1dt_2<\infty,\ T\to\infty$, тобто інтеграл $\Gamma(T)=O(T^{-2})$ при $T\to\infty$.

Нехай виконано умову **N(i)**. Тоді після заміни змінних $t_1\to Tt_1,\ t_2\to Tt_2$ отримуємо

$$\Gamma(T) = T^{-2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}\Big(1-\frac{|t_1|}{T}\Big)\Big(1-\frac{|t_2|}{T}\Big)B(\|t\|)dt_1dt_2 =$$

$$= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(1-|t_1|)(1-|t_2|)B(T\|t\|)dt_1dt_2 \le \frac{L(T)}{T^\alpha}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{dt_1dt_2}{\|t\|^\alpha},$$

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{dt_1dt_2}{\|t\|^\alpha} \le \int_{V(\sqrt{2})}\|t\|^{-\alpha}dt = 2\pi\int_0^{\sqrt{2}}\rho^{1-\alpha}d\rho = \frac{2^{2-\alpha/2}\pi}{2-\alpha},$$

тобто $\Gamma(T)=O(B(T))$ при $T\to\infty$.

Таким чином, маємо, що $I_1(u) \xrightarrow{P} 0$ при $T \to \infty$ поточково для $u \in V^c(R)$. З іншого боку,

$$P\left\{\sup_{\|u_1-u_2\|\le h} |I_1(u_1) - I_2(u_2)| > r\right\} \le$$
$$\le r^{-1}\,\mathsf{E} \sup_{\|u_1-u_2\|\le h} \left| \int_0^T \int_0^T \varepsilon(t_1,t_2) \frac{H_i(t_1,t_2;u_1,u_2)}{d_{iT}(\theta)} dt_1 dt_2 \right| \le$$
$$\le r^{-1} \sup_{\|u_1-u_2\|\le h} \sup_{(t_1,t_2)\in[0,T]^2} \frac{|H_i(t_1,t_2;u_1,u_2)|}{d_{iT}(\theta)}\,\mathsf{E}\,|\varepsilon(0,0)|T^2, \tag{2.16}$$

За умови **R3** отримуємо

$$\sup_{\|u_1-u_2\|\le h} \sup_{(t_1,t_2)\in[0,T]^2} \frac{|H_i(t_1,t_2;u_1,u_2)|}{d_{iT}(\theta)} \le$$
$$\le h\left[\sum_{l=1}^{q} \sup_{(t_1,t_2)\in[0,T]^2,\, u\in V^c(R)} \frac{|h_{il}(t_1,t_2;u)|}{d_{il,T}(\theta)} \frac{d_{il,T}(\theta)}{d_{iT}(\theta)d_{lT}(\theta)}\right] \le h\left(\sum_{l=1}^{q} k_{il}(R)\tilde{k}_{il}\right)T^{-2}. \tag{2.17}$$

З (2.17) випливає нерівність

$$P\left\{\sup_{\|u_1-u_2\|\le h} |I_1(u_1) - I_2(u_2)| > r\right\} \le k_1 r^{-1} h, \tag{2.18}$$

де

$$k_1 = \left(\sum_{l=1}^{q} k_{il}(R)\tilde{k}_{il}\right)\mathsf{E}\,|\varepsilon(0,0)|.$$

Нехай N_h скінченна h-сітка кулі $V^c(R)$. Тоді

$$\sup_{u\in V^c(R)} |I_1(u)| \le \sup_{\|u_1-u_2\|\le h} |I_1(u_1) - I_1(u_2)| + \max_{u\in N_h} |I_1(u)|. \tag{2.19}$$

З (2.16), (2.17) маємо для будь-якого $r > 0$

$$P\left\{\sup_{u\in V^c(R)} |I_1(u)| > r\right\} \le 2k_1 r^{-1} h + P\left\{\max_{u\in N_h} |I_1(u)| > \frac{r}{2}\right\}. \tag{2.20}$$

Для $\varepsilon > 0$ задамо $h = \frac{\varepsilon r}{4k_1}$. Тоді для $T > T_0$ завдяки поточковій збіжності $I_1(u)$ до нуля за ймовірністю,

$$P\left\{\max_{u\in N_{\frac{\varepsilon r}{4k_1}}} |I_1(u)| > \frac{r}{2}\right\} \le \frac{\varepsilon}{2},$$

внаслідок чого

$$P\left\{\sup_{u\in V^c(R)}|I_1(u)|>r\right\}\leq \varepsilon.$$

Таким чином, $I_1(u)$ збігається рівномірно за $u\in V^c(R)$ до нуля за ймовірністю.

За теоремою Лагранжа, нерівністю Коші-Буняковського та умови **R3**,

$$\sup_{u\in V^c(R)}\sup_{(t_1,t_2)\in[0,T]^2}|H(t_1,t_2;0,u)|=\sup_{u\in V^c(R)}\sup_{(t_1,t_2)\in[0,T]^2}\left|\sum_{i=1}^{q}\frac{h_i(t_1,t_2;u^*_{t_1,t_2})}{d_{iT}(\theta)}u_i\right|\leq$$

$$\leq\|u\|\left[\sup_{(t_1,t_2)\in[0,T]^2,\,u\in V^c(R)}\sum_{i=1}^{q}\left(\frac{h_i(t_1,t_2;u)}{d_{iT}(\theta)}\right)^2\right]^{1/2}\leq\|k(R)\|RT^{-1},\qquad(2.21)$$

де $k(R)=(k_1(R),...,k_q(R))$. Тоді, завдяки (2.15) та (2.21), запишемо

$$\sup_{u\in V^c(R)}|I_2(u)|=\sup_{u\in V^c(R)}\left|\int_0^T\int_0^T H(t_1,t_2;0,u)\frac{H_i(t_1,t_2;u,o)}{d_{iT}(\theta)}dt_1dt_2\right|\leq T^2\times$$

$$\times\sup_{u\in V^c(R)}\sup_{(t_1,t_2)\in[0,T]^2}\left|H(t_1,t_2;0,u)\frac{H_i(t_1,t_2;u,o)}{d_{iT}(\theta)}\right|\leq T^{-1}R^2\|k(R)\|\Big(\sum_{l=1}^{q}k_{il}(R)\tilde{k}_{il}\Big),$$

і $I_2(u)$ рівномірно за $u\in V^c(R)$ при $T\to\infty$ збігається до 0.

Неважко побачити, що $I_3(u)$ можна записати у вигляді

$$I_3(u)=\int_0^T\int_0^T\frac{g_i(t_1,t_2;\theta)}{d_{iT}(\theta)}\left[H(t_1,t_2;0,u)+\sum_{l=1}^{q}\frac{g_l(t_1,t_2;\theta)}{d_{lT}(\theta)}u_l\right]dt_1dt_2=$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^T\int_0^T\frac{g_i(t_1,t_2;\theta)}{d_{iT}(\theta)}\sum_{l,j=1}^{q}\frac{h_{lj}(t_1,t_2;u^*_{t_1,t_2})}{d_{lT}(\theta)d_{jT}\theta}u_lu_jdt_1dt_2=$$

$$=-\frac{1}{2}\sum_{l,j=1}^{q}\left(\int_0^T\int_0^T\frac{h_{lj}(t_1,t_2;u^*_{t_1,t_2})}{d_{lT}(\theta)d_{jT}\theta}\frac{g_i(t_1,t_2;\theta)}{d_{iT}(\theta)}dt_1dt_2\right)u_lu_j,\ u^*_t\in V(R).$$

Тоді, за умови **R3**,

$$\sup_{u\in V^c(R)}|I_3(u)|\leq\frac{T^2}{2}k_i(R)\left(\sum_{l,j=1}^{q}k_{jl}(R)\tilde{k}_{jl}|u_l||u_j|\right)T^{-3}\leq$$

$$\leq\frac{qk_i(R)}{2}\max_{1\leq j,l\leq q}\left[k_{jl}(R)\tilde{k}_{jl}\right]R^2T^{-1}.$$

Отже, $I_3(u)$ рівномірно за $u\in V^c(R)$ при $T\to\infty$ збігається до 0. $\square$

Перевіримо, що умова **R3** виконується для розглядуваної нами функції регресії (1.2), (1.3). Очевидно, при $k = \overline{1, N}$

$$g_{4k-3}(t;\theta^0) = \frac{\partial}{\partial A_k^0} g(t;\theta^0) = \cos(\lambda_k^0 t_1 + \mu_k^0 t_2),$$

$$g_{4k-2}(t;\theta^0) = \frac{\partial}{\partial B_k^0} g(t;\theta^0) = \sin(\lambda_k^0 t_1 + \mu_k^0 t_2),$$

$$g_{4k-1}(t;\theta^0) = \frac{\partial}{\partial \lambda_k^0} g(t;\theta^0) = -t_1 A_k^0 \sin(\lambda_k^0 t_1 + \mu_k^0 t_2) + t_1 B_k^0 \cos(\lambda_k^0 t_1 + \mu_k^0 t_2),$$

$$g_{4k}(t;\theta^0) = \frac{\partial}{\partial \mu_k^0} g(t;\theta^0) = -t_2 A_k^0 \sin(\lambda_k^0 t_1 + \mu_k^0 t_2) + t_2 B_k^0 \cos(\lambda_k^0 t_1 + \mu_k^0 t_2),$$

$$g_{4k-3,4k-1}(t;\theta^0) = g_{4k-1,4k-3}(t;\theta^0) = \frac{\partial^2}{\partial A_k^0 \partial \lambda_k^0} g(t;\theta^0) = -t_1 \sin(\lambda_k^0 t_1 + \mu_k^0 t_2),$$

$$g_{4k-3,4k}(t;\theta^0) = g_{4k,4k-3}(t;\theta^0) = \frac{\partial^2}{\partial A_k^0 \partial \mu_k^0} g(t;\theta^0) = -t_2 \sin(\lambda_k^0 t_1 + \mu_k^0 t_2),$$

$$g_{4k-2,4k-1}(t;\theta^0) = g_{4k-1,4k-2}(t;\theta^0) = \frac{\partial^2}{\partial B_k^0 \partial \lambda_k^0} g(t;\theta^0) = t_1 \cos(\lambda_k^0 t_1 + \mu_k^0 t_2),$$

$$g_{4k-2,4k}(t;\theta^0) = g_{4k,4k-2}(t;\theta^0) = \frac{\partial^2}{\partial B_k^0 \partial \mu_k^0} g(t;\theta^0) = t_2 \cos(\lambda_k^0 t_1 + \mu_k^0 t_2),$$

$$g_{4k-1,4k-1}(t;\theta^0) = \frac{\partial^2}{(\partial \lambda_k^0)^2} g(t;\theta^0) = -t_1^2 A_k^0 \cos(\lambda_k^0 t_1 + \mu_k^0 t_2) - t_1^2 B_k^0 \sin(\lambda_k^0 t_1 + \mu_k^0 t_2),$$

$$g_{4k,4k}(t;\theta^0) = \frac{\partial^2}{(\partial \mu_k^0)^2} g(t;\theta^0) = -t_2^2 A_k^0 \cos(\lambda_k^0 t_1 + \mu_k^0 t_2) - t_2^2 B_k^0 \sin(\lambda_k^0 t_1 + \mu_k^0 t_2),$$

$$g_{4k-1,4k}(t;\theta^0) = g_{4k,4k-1}(t;\theta^0) = \frac{\partial^2}{\partial \lambda_k^0 \partial \mu_k^0} g(t;\theta^0) =$$
$$= -t_1 t_2 A_k^0 \cos(\lambda_k^0 t_1 + \mu_k^0 t_2) - t_1 t_2 B_k^0 \sin(\lambda_k^0 t_1 + \mu_k^0 t_2),$$
$$g_{4k-3,4k-2}(t;\theta^0) = g_{4k-2,4k-3}(t;\theta^0) = g_{4k-3,4k-3}(t;\theta^0) = g_{4k-2,4k-2}(t;\theta^0) = 0.$$

Маємо далі

$$d^2_{4k-i,T}(\theta^0) = \frac{T^2}{2} + O(1),\ i = 2,3;$$
$$d^2_{4k-i,T}(\theta^0) = \frac{(A_k^2 + B_k^2)T^4}{6} + O(T^2),\ i = 0,1; \tag{2.22}$$
$$d^2_{4k-i,4k-1,T}(\theta^0) = \frac{T^4}{6} + O(T^2),\ i = 2,3;$$
$$d^2_{4k-i,4k,T}(\theta^0) = \frac{T^4}{6} + O(T^2),\ i = 2,3;$$
$$d^2_{4k-1,4k-1,T}(\theta^0) = \frac{((A_k^2)^2 + (B_k^0)^2)T^6}{10} + O(T^4);$$

$$d^2_{4k-1,4k,T}(\theta^0) = \frac{((A_k^2)^2 + (B_k^0)^2)T^6}{18} + O(T^4);$$
$$d^2_{4k,4k,T}(\theta^0) = \frac{((A_k^2)^2 + (B_k^0)^2)T^6}{10} + O(T^4). \qquad (2.23)$$

Використовуючи (2.23), (2.24), бачимо, що

$$\sup_{t\in[0,T]^2,\, u\in V^c(R)} \frac{|h_{4k-3}(t;u)|}{d_{4k-3,T}(\theta^0)} =$$
$$= \sup_{t\in[0,T]^2,\, u\in V^c(R)} \frac{|\cos\big((\lambda_k^0 + d^{-1}_{4k-1,T}(\theta^0)u_{4k-1})t_1 + (\mu_k^0 + d^{-1}_{4k,T}(\theta^0)u_{4k})t_2\big)|}{\sqrt{\frac{T^2}{2} + O(1)}} =$$
$$= O(T^{-1}).$$

Так само

$$\sup_{t\in[0,T]^2,\, u\in V^c(R)} \frac{|h_{4k-i}(t;u)|}{d_{4k-i,T}(\theta^0)} = O(T^{-1}),\ i = 0, 1, 2,$$

тобто **R3(i)** виконано.

Аналогічно

$$\sup_{t\in[0,T]^2,\, u\in V^c(R)} \frac{|h_{4k-3,4k-1}(t;u)|}{d_{4k-3,4k-1;T}(\theta^0)} =$$
$$= \sup_{t\in[0,T]^2,\, u\in V^c(R)} \frac{|-t_1\sin\big((\lambda_k^0 + d^{-1}_{4k-1,T}(\theta^0)u_{4k-1})t_1 + (\mu_k^0 + d^{-1}_{4k,T}(\theta^0)u_{4k})t_2\big)|}{\sqrt{\frac{T^4}{6} + O(T^2)}} =$$
$$= O(T^{-1});$$
$$\sup_{t\in[0,T]^2,\, u\in V^c(R)} \frac{|h_{4k-i,4k}(t;u)|}{d_{4k-i,4k;T}(\theta^0)} = O(T^{-1}),\ i = 0, 1, 2, 3;$$
$$\sup_{t\in[0,T]^2,\, u\in V^c(R)} \frac{|h_{4k-i,4k-1}(t;u)|}{d_{4k-i,4k-1;T}(\theta^0)} = O(T^{-1}),\ i = 1, 2,$$

і **R3(ii)** також виконано. Крім цього, виконання **R3(iii)** випливає з наступних співвідношень:

$$\frac{d_{4k-3,4k-1;T}(\theta^0)}{d_{4k-3,T}(\theta^0)d_{4k-1,T}(\theta^0)} = \frac{\sqrt{\frac{T^4}{6} + O(T^2)}}{\sqrt{\frac{T^2}{2} + O(1)}\sqrt{\frac{((A_k^0)^2 + (B_k^0)^2)T^4}{6} + O(T^2)}} = O(T^{-1});$$
$$\frac{d_{4k-3,4k;T}(\theta^0)}{d_{4k-3,T}(\theta^0)d_{4k,T}(\theta^0)} = \frac{\sqrt{\frac{T^4}{6} + O(T^2)}}{\sqrt{\frac{T^2}{2} + O(1)}\sqrt{\frac{((A_k^0)^2 + (B_k^0)^2)T^4}{6} + O(T^2)}} = O(T^{-1});$$

$$\frac{d_{4k-2,4k-1;T}(\theta^0)}{d_{4k-2,T}(\theta^0)d_{4k-1,T}(\theta^0)} = \frac{\sqrt{\frac{T^4}{6} + O(T^2)}}{\sqrt{\frac{T^2}{2} + O(1)}\sqrt{\frac{((A_k^0)^2+(B_k^0)^2)T^4}{6} + O(T^2)}} = O(T^{-1});$$

$$\frac{d_{4k-2,4k;T}(\theta^0)}{d_{4k-2,T}(\theta^0)d_{4k,T}(\theta^0)} = \frac{\sqrt{\frac{T^4}{6} + O(T^2)}}{\sqrt{\frac{T^2}{2} + O(1)}\sqrt{\frac{((A_k^0)^2+(B_k^0)^2)T^4}{6} + O(T^2)}} = O(T^{-1});$$

$$\frac{d_{4k-3,4k-1;T}(\theta^0)}{d_{4k-3,T}(\theta^0)d_{4k-1,T}(\theta^0)} = \frac{\sqrt{\frac{T^4}{6} + O(T^2)}}{\sqrt{\frac{T^2}{2} + O(1)}\sqrt{\frac{((A_k^0)^2+(B_k^0)^2)T^4}{6} + O(T^2)}} = O(T^{-1});$$

$$\frac{d_{4k-1,4k-1;T}(\theta^0)}{d_{4k-1,T}(\theta^0)d_{4k-1,T}(\theta^0)} = \frac{\sqrt{\frac{((A_k^0)^2+(B_k^0)^2)T^6}{10} + O(T^4)}}{\frac{((A_k^0)^2+(B_k^0)^2)T^4}{6} + O(T^2)} = O(T^{-1});$$

$$\frac{d_{4k,4k;T}(\theta^0)}{d_{4k,T}(\theta^0)d_{4k,T}(\theta^0)} = \frac{\sqrt{\frac{((A_k^0)^2+(B_k^0)^2)T^6}{10} + O(T^4)}}{\frac{((A_k^0)^2+(B_k^0)^2)T^4}{6} + O(T^2)} = O(T^{-1});$$

$$\frac{d_{4k-1,4k;T}(\theta^0)}{d_{4k-1,T}(\theta^0)d_{4k,T}(\theta^0)} = \frac{\sqrt{\frac{((A_k^0)^2+(B_k^0)^2)T^6}{18} + O(T^4)}}{\frac{((A_k^0)^2+(B_k^0)^2)T^4}{6} + O(T^2)} = O(T^{-1}).$$

Таким чином, для тригонометричної моделі регресії (1.1)-(1.3) умову **R3** виконано.

3 Асимптотична єдиність оцінки найменших квадратів

Позначимо

$$J_T(\theta) = (J_{il,T}(\theta))_{i,l=1}^q, \ J_{il,T}(\theta) = d_{iT}^{-1}(\theta) d_{lT}^{-1}(\theta) \int_0^T \int_0^T g_i(t_1,t_2;\theta) g_l(t_1,t_2;\theta) dt_1 dt_2, \tag{3.1}$$

$\lambda_{min}(A)$ $(\lambda_{max}(A))$ – найменше (найбільше) власне число додатно визначеної матриці A.

R4. Для деякого $\lambda_* > 0$ при $T > T_0$

$$\lambda_{min}(J_T(\theta)) \geq \lambda_*. \tag{3.2}$$

Розглянемо нормовану ОНК

$$\hat{w}_T = \hat{w}_T(\theta) = T^{-1} d_T(\theta)(\hat{\theta}_T - \theta), \tag{3.3}$$

якій відповідає заміна змінних $w = T^{-1} d_T(\theta)(\tau - \theta)$ у функції регресії та її похідних.

Введемо позначення

$$\begin{gathered} g(t_1,t_1;\tau) = g\big(t_1,t_2;\theta + T d_T^{-1}(\theta) w\big) = f(t_1,t_2;w), \\ g_i(t_1,t_1;\tau) = g_i\big(t_1,t_2;\theta + T d_T^{-1}(\theta) w\big) = f_i(t_1,t_2;w), \\ g_{il}(t_1,t_1;\tau) = g_{il}\big(t_1,t_2;\theta + T d_T^{-1}(\theta) w\big) = f_{il}(t_1,t_2;w), \ i,l = \overline{1,q}. \end{gathered} \tag{3.4}$$

Також запишемо

$$\begin{gathered} F(t_1,t_2;w_1,w_2) = f(t_1,t_2;w_1) - f(t_1,t_2;w_2), \\ F_i(t_1,t_2;w_1,w_2) = f_i(t_1,t_2;w_1) - f_i(t_1,t_2;w_2), \\ F_{il}(t_1,t_2;w_1,w_2) = f_{il}(t_1,t_2;w_1) - f_{il}(t_1,t_2;w_2), \\ \Phi_{il,T}(w,0) = \int_0^T \int_0^T F_{il}^2(t_1,t_2;w,0) dt_1 dt_2, \ i,l = \overline{1,q}. \end{gathered} \tag{3.5}$$

Нам потрібна наступна умова

R5. Для деякого $r_0 > 0$ і $T > T(r_0) > 0$

$$(i) \qquad \sup_{(t_1,t_2)\in[0,T]^2,\, w\in V^c(r_0)} \frac{|f_i(t_1,t_2;w)|}{d_{iT}(\theta)} \leq \hat{k}_i(r_0) T^{-1}, \ i = \overline{1,q}; \tag{3.6}$$

$$(ii) \qquad \sup_{(t_1,t_2)\in[0,T]^2,\, w\in V^c(r_0)} \frac{|f_{il}(t_1,t_2;w)|}{d_{il,T}(\theta)} \leq \hat{k}_{il}(r_0) T^{-1}, \ i,l = \overline{1,q}; \tag{3.7}$$

$$(iii) \sup_{w \in V^c(r_0)} T^2 d_{iT}^{-2}(\theta) d_{lT}^{-2}(\theta) \Phi_{il,T}(w,0) \|w\|^2 \leq \hat{k}_{il}(r_0),\ i,l = \overline{1,q}. \tag{3.8}$$

Розглянемо інтеграл

$$\frac{1}{2} T^{-2} \int_0^T \int_0^T \big(X(t_1,t_2) - f(t_1,t_2;w)\big)^2 dt_1 dt_2 = \frac{1}{2} Q_T\Big(\theta + T d_T^{-1}(\theta) w\Big) \tag{3.9}$$

і його градієнт

$$\mathcal{M}_T(w) = \big(\mathcal{M}_T^i(w)\big)_{i=1}^q = \Big(\frac{\partial}{\partial w_i}\Big(\frac{1}{2} Q_T(\theta + T d_T^{-1}(\theta) w)\Big)\Big)_{i=1}^q =$$
$$= \Big(T^{-1} \int_0^T \int_0^T \big(X(t_1,t_2) - f(t_1,t_2;w)\big) \frac{-f_i(t_1,t_2;w)}{d_{iT}(\theta)} dt_1 dt_2\Big)_{i=1}^q.$$

Тоді нормована ОНК $\hat{w}_T$ задовольняє систему рівнянь

$$\mathcal{M}_T(w) = 0. \tag{3.10}$$

Наступна умова є умовою слабкої консистентності нормованої оцінки $\hat{w}_T$.

C. Для будь-якого $r > 0$ $P\big\{\|\hat{w}_T\| > r\big\} \to 0,\ T \to \infty$.

Теорема 3 *Нехай виконуються умови* **N**, **R3(iii)**, **R4**, **R5**, **C**. *Тоді нормована ОНК $\hat{w}_T$ з ймовірністю, що прямує до 1 при $T \to \infty$, є единим розв'язком системи рівнянь (3.10).*

Доведення. Розглянемо довільний елемент матриці Гессе інтеграла (3.9) $\mathcal{H}(w) = \big(\mathcal{H}_T^{il}(w)\big)_{i,l=1}^q$:

$$\mathcal{H}_T^{il}(w) = \frac{\partial^2}{\partial w_i \partial w_l}\Big(\frac{1}{2} Q_T(\theta + T d_T^{-1}(\theta) w)\Big) =$$
$$= T^{-2} \int_0^T \int_0^T \left(\big(X(t_1,t_2) - f(t_1,t_2;w)\big) \frac{-f_{il}(t_1,t_2;w)}{d_{iT}(\theta) d_{lT}(\theta)} T^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{f_i(t_1,t_2;w) f_l(t_1,t_2;w)}{d_{iT}(\theta) d_{lT}(\theta)} T^2 \right) dt_1 dt_2 = \int_0^T \int_0^T \big(F(t_1,t_2;0,w) + \varepsilon(t_1,t_2)\big) \times$$
$$\times \frac{-f_{il}(t_1,t_2;w)}{d_{iT}(\theta) d_{lT}(\theta)} dt_1 dt_2 + \int_0^T \int_0^T \frac{f_i(t_1,t_2;w) f_l(t_1,t_2;w)}{d_{iT}(\theta) d_{lT}(\theta)} dt_1 dt_2 =$$
$$= \int_0^T \int_0^T F(t_1,t_2;w,0) \frac{f_{il}(t_1,t_2;w)}{d_{iT}(\theta) d_{lT}(\theta)} dt_1 dt_2 - \int_0^T \int_0^T \varepsilon(t_1,t_2) \frac{f_{il}(t_1,t_2;w)}{d_{iT}(\theta) d_{lT}(\theta)} dt_1 dt_2 +$$

$$+\int_0^T\int_0^T \frac{(f_i(t_1,t_2;w)-f_i(t_1,t_2;0))(f_l(t_1,t_2;w)-f_l(t_1,t_2;0))}{d_{iT}(\theta)d_{lT}(\theta)}dt_1dt_2+$$
$$+\int_0^T\int_0^T \frac{(f_i(t_1,t_2;w)-f_i(t_1,t_2;0))f_l(t_1,t_2;0)}{d_{iT}(\theta)d_{lT}(\theta)}dt_1dt_2+$$
$$+\int_0^T\int_0^T \frac{(f_l(t_1,t_2;w)-f_l(t_1,t_2;0))f_i(t_1,t_2;0)}{d_{iT}(\theta)d_{lT}(\theta)}dt_1dt_2+$$
$$+\int_0^T\int_0^T \frac{f_i(t_1,t_2;0)f_l(t_1,t_2;0)}{d_{iT}(\theta)d_{lT}(\theta)}dt_1dt_2=$$
$$=I_1(w)+I_2(w)+I_3(w)+I_4(w)+I_5(w)+J_{il,T}(\theta),\ i,l=\overline{1,q}. \tag{3.11}$$

Застосовуючи нерівність ([25], с. 103)

$$|\lambda_{min}(\mathcal{H}(w))-\lambda_{min}(J_T(\theta^0))|\le q\max_{1\le i,l\le q}\left|\mathcal{H}_{il}(w)-J_{il,T}(\theta^0)\right|, \tag{3.12}$$

знаходимо

$$\max_{1\le i,l\le q}\left|\mathcal{H}_{il}(w)-J_{il,T}(\theta^0)\right|\le\sum_{m=1}^{5}\max_{1\le i,l\le q}|I_m(w)|. \tag{3.13}$$

За умовами теореми для $\|w\|\le r_0$

$$|I_1(w)|=\left|\int_0^T\int_0^T F(t_1,t_2;w,0)\frac{f_{il}(t_1,t_2;w)}{d_{iT}(\theta)d_{lT}(\theta)}dt_1dt_2\right|\le$$
$$\le T^2\sup_{(t_1,t_2)\in[0,T]^2}\left|F(t_1,t_2;w,0)\frac{f_{il}(t_1,t_2;w)}{d_{iT}(\theta)d_{lT}(\theta)}\right|\le T^2\hat{k}_{il}(r_0)\tilde{k}_{il}T^{-2}\times$$
$$\times\sup_{(t_1,t_2)\in[0,T]^2}|F(t_1,t_2;w,0)|\le\hat{k}_{il}\tilde{k}_{il}\sup_{(t_1,t_2)\in[0,T]^2}|f(t_1,t_2;w)-f(t_1,t_2;0)|=$$
$$=\hat{k}_{il}\tilde{k}_{il}\sup_{(t_1,t_2)\in[0,T]^2}\left|T\sum_{l=1}^{q}\frac{f_l(t_1,t_2;w^*_{(t_1,t_2)})}{d_{lT}(\theta)}w_l\right|\le\hat{k}_{il}\tilde{k}_{il}T\times$$
$$\times\left(\sum_{l=1}^{q}\sup_{(t_1,t_2)\in[0,T]^2,\,w\in V^c(r_0)}\left(\frac{f_l(t_1,t_2;w)}{d_{iT}(\theta)}\right)^2\right)^{1/2}\|w\|\le\|\hat{k}(r_0)\|\cdot\hat{k}_{il}\cdot\tilde{k}_{il}\cdot\|w\|, \tag{3.14}$$

$$\hat{k}(r_0)=\left(\hat{k}_1(r_0),\dots,\hat{k}_q(r_0)\right),\ \|w^*_t\|\le\|w\|,\ (t_1,t_2)\in[0,T]^2.$$

Запишемо

$$|I_2(w)|=\left|\int_0^T\int_0^T\varepsilon(t_1,t_2)\frac{f_{il}(t_1,t_2;w)}{d_{iT}(\theta)d_{lT}(\theta)}dt_1dt_2\right|=$$
$$=\left|\int_0^T\int_0^T\varepsilon(t_1,t_2)\frac{F_{il}(t_1,t_2;w,0)}{d_{iT}(\theta)d_{lT}(\theta)}dt_1dt_2+\int_0^T\int_0^T\varepsilon(t_1,t_2)\frac{f_{il}(t_1,t_2;0)}{d_{iT}(\theta)d_{lT}(\theta)}dt_1dt_2\right|\le$$
$$\le|I_6(w)|+|I_7(w)|. \tag{3.15}$$

За нерівністю **R5(iii)**

$$|I_6(w)| = \Big|\int_0^T\int_0^T \varepsilon(t_1,t_2)\frac{F_{il}(t_1,t_2;w,0)}{d_{iT}(\theta)d_{lT}(\theta)}dt_1dt_2\Big| \le$$
$$\le \left(T^{-2}\int_0^T\int_0^T \varepsilon^2(t_1,t_2)dt_1dt_2\right)^{1/2}\cdot\left(T^2\frac{\Phi_{il,T}(w,0)}{d_{iT}^2(\theta)d_{lT}^2(\theta)}\right)^{1/2} \le$$
$$\le \left(T^{-2}\int_0^T\int_0^T \varepsilon^2(t_1,t_2)dt_1dt_2\right)^{1/2}\cdot\big(\hat{k}_{il}(r_0)\big)^{1/2}\cdot\|w\|. \tag{3.16}$$

Крім цього,

$$\Big(T^{-2}\int_0^T\int_0^T \varepsilon^2(t_1,t_2)dt_1dt_2\Big)^{1/2} =$$
$$= \Big(T^{-2}\int_0^T\int_0^T (\varepsilon^2(t_1,t_2) - \mathsf{E}\,\varepsilon^2(0,0))dt_1dt_2 + \mathsf{E}\,\varepsilon^2(0,0)\Big)^{1/2} =$$
$$= \big(\xi_T + \mathsf{E}\,\varepsilon^2(0,0)\big)^{1/2},$$
$$\mathsf{E}\,\xi_T^2 = T^{-4}\int_0^T\int_0^T\int_0^T\int_0^T \big(\mathsf{E}\,\varepsilon^2(t_1,t_2)\varepsilon^2(s_1,s_2) - (\mathsf{E}\,\varepsilon^2(0,0))^2\big)dt_1dt_2ds_1ds_2.$$

Покажемо, що

$$\mathsf{E}\,\xi_T^2 \to 0,\ T\to\infty. \tag{3.17}$$

За умови **N** та формули Ісерліса

$$\mathsf{E}\,\varepsilon^2(t_1,t_2)\varepsilon^2(s_1,s_2) - (\mathsf{E}\,\varepsilon^2(0,0))^2 = 2B^2(t_1-s_1,t_2-s_2).$$

Нехай виконано умову **N(ii)**. За теоремою Лебега про мажоровану збіжність

$$T^{-2}\int_0^T\int_0^T\int_0^T\int_0^T B^2(t_1-s_1,t_2-s_2)dt_1dt_2ds_1ds_2 =$$
$$= \int_{-T}^T\int_{-T}^T\Big(1-\frac{|t_1|}{T}\Big)\Big(1-\frac{|t_2|}{T}\Big)B^2(t_1,t_2)dt_1dt_2 \to$$
$$\to \int_{\mathbb{R}^2} B^2(t_1,t_2)dt_1dt_2,\ T\to\infty,$$

тобто (3.17) має місце.

Нехай виконано умову **N(i)**. Тоді так само, як і в доведенні теореми 2, ми отримуємо

$$T^{-2}\int_{-T}^T\int_{-T}^T\Big(1-\frac{|t_1|}{T}\Big)\Big(1-\frac{|t_2|}{T}\Big)B^2(\|t\|)dt_1dt_2 = O(B^2(T)),\ T\to\infty,$$

і (3.17) виконується.

Позначимо $\xi_T = o_p^{(1)}(1) \xrightarrow{P} 0,\ T \to \infty$.

Якщо виконано умову **N(ii)** з використанням умови **R5** отримуємо

$$\mathsf{E}\,|I_7(w)|^2 = \mathsf{E}\Big|\int_0^T\int_0^T \varepsilon(t_1,t_2)\frac{f_{il}(t_1,t_2;0)}{d_{iT}(\theta)d_{lT}(\theta)}dt_1dt_2\Big|^2 \le$$
$$\le \int_0^T\int_0^T\int_0^T\int_0^T |\,\mathsf{E}\,\varepsilon(t_1,t_2)\varepsilon(s_1,s_2)|dt_1dt_2ds_1ds_2\left(\sup_{(t_1,t_2)\in[0,T]^2}\frac{f_{il}(t_1,t_2;0)}{d_{iT}(\theta)d_{lT}(\theta)}\right)^2 \le$$
$$\le (\hat{k}_{il}(r_0)\cdot\tilde{k}_{il})^2T^{-4}\int_0^T\int_0^T\int_0^T\int_0^T |B(t_1-s_1,t_2-s_2)|dt_1dt_2ds_1ds_2 \le$$
$$\le T^{-2}\int_{\mathbb{R}^2}|B(t_1,t_2)|dt_1dt_2 \to 0,\ T\to\infty.$$

За умови **N(i)** це математичне сподівання, як було показано в доведенні теореми 2, є величиною $O(B(T))$. Таким чином,

$$|I_7(w)| = o_p^{(2)}(1) \xrightarrow{P} 0,\ T\to\infty. \tag{3.18}$$

Маємо далі

$$|I_3(w)| = \Big|\int_0^T\int_0^T \frac{(f_i(t_1,t_2;w)-f_i(t_1,t_2;0))(f_l(t_1,t_2;w)-f_l(t_1,t_2;0))}{d_{iT}(\theta)d_{lT}(\theta)}dt_1dt_2\Big| \le$$
$$\le T^4\sum_{j=1}^q\sum_{s=1}^q \sup_{(t_1,t_2)\in[0,T]^2}\frac{|f_{ij}(t_1,t_2;w^*_{1(t_1,t_2)})|}{d_{iT}(\theta)d_{jT}(\theta)}\sup_{(t_1,t_2)\in[0,T]^2}\frac{|f_{ls}(t_1,t_2;w^*_{2(t_1,t_2)})|}{d_{sT}(\theta)d_{lT}(\theta)}dt_1dt_2\times$$
$$\times|w_j|\cdot|w_s| \le T^4\sum_{j=1}^q\sum_{s=1}^q \sup_{(t_1,t_2)\in[0,T]^2}\frac{|f_{ij}(t_1,t_2;w^*_{1(t_1,t_2)})|}{d_{ij,T}(\theta)}\cdot\frac{d_{ij,T}(\theta)}{d_{iT}(\theta)d_{jT}(\theta)}\times$$
$$\times\sup_{(t_1,t_2)\in[0,T]^2}\frac{|f_{ls}(t_1,t_2;w^*_{2(t_1,t_2)})|}{d_{ls,T}(\theta)}\cdot\frac{d_{ls,T}(\theta)}{d_{sT}(\theta)d_{lT}(\theta)}dt_1dt_2\cdot|w_j|\cdot|w_s| \le$$
$$\le\left(\sum_{s=1}^q\left(\hat{k}_{ls}(r_0)\cdot\tilde{k}_{ls}\right)^2\right)^{1/2}\left(\sum_{j=1}^q\left(\hat{k}_{ij}(r_0)\cdot\tilde{k}_{ij}\right)^2\right)^{1/2}\|w\|^2, \tag{3.19}$$

$\|w^*_{1(t_1,t_2)}\|,\ \|w^*_{2(t_1,t_2)}\| \le \|w\|,\ (t_1,t_2)\in[0,T]^2$.

За умов теореми **R3** та **R5** отримуємо також, що

$$|I_4(w)| = \Big|\int_0^T\int_0^T\frac{(f_i(t_1,t_2;w)-f_i(t_1,t_2;0))f_l(t_1,t_2;0)}{d_{iT}(\theta)d_{lT}(\theta)}dt_1dt_2\Big| \le$$
$$\le T^3\sum_{j=1}^q|w_j|\cdot\sup_{(t_1,t_2)\in[0,T]^2}\frac{|f_{ij}(t_1,t_2;w^*_{(t_1,t_2)})|}{d_{ij,T}(\theta)}\cdot\frac{d_{ij,T}(\theta)}{d_{iT}(\theta)d_{jT}(\theta)}\frac{f_l(t_1,t_2;0)}{d_{lT}(\theta)} \le$$

$$\leq \hat{k}_l(r_0) \cdot \left(\sum_{j=1}^{q} (\hat{k}_{ij}(r_0) \cdot \tilde{k}_{ij})^2 \right)^{1/2} \cdot \|w\|, \tag{3.20}$$

$$|I_5(w)| \leq \hat{k}_i(r_0) \cdot \left(\sum_{j=1}^{q} (\hat{k}_{lj}(r_0) \cdot \tilde{k}_{lj})^2 \right)^{1/2} \cdot \|w\|. \tag{3.21}$$

Фінальний етап доведення теореми 3 співпадає з міркуваннями в [10, 11], і ми їх наводимо тільки для повноти викладення матеріалу.

Отже, враховуючи отримані нерівності (3.12)–(3.21), маємо

$$|\lambda_{min}(\mathcal{H}_T(w)) - \lambda_{min}(J_T(\theta^0))| \leq$$
$$\leq q \max_{1\leq i,l\leq q} \Bigg(\|\hat{k}(r_0)\| \cdot \hat{k}_{il} \cdot \tilde{k}_{il} \cdot \|w\| + \left(o_p^{(1)}(1) + \mathsf{E}\,\xi^2(0,0)\right)^{1/2} (\hat{k}_{il}^{1/2}) \cdot \|w\| +$$
$$+ o_p^{(2)}(1) + \left(\sum_{s=1}^{q} \left(\hat{k}_{ls}(r_0) \cdot \tilde{k}_{ls}\right)^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{q} \left(\hat{k}_{il}(r_0) \cdot \tilde{k}_{ij}\right)^2 \right)^{1/2} \|w\|^2 +$$
$$+ \hat{k}_l(r_0) \left(\sum_{j=1}^{q} \left(\hat{k}_{ij}(r_0) \cdot \tilde{k}_{ij}\right)^2 \right)^{1/2} \cdot \|w\| + \hat{k}_i(r_0) \cdot \left(\sum_{j=1}^{q} \left(\hat{k}_{lj}(r_0) \cdot \tilde{k}_{lj}\right)^2 \right)^{1/2} \cdot \|w\| \Bigg). \tag{3.22}$$

Підставляючи в (3.22) нормовану ОНК $\hat{w}_T$, та враховуючи, що за умови **R4** $J_T(\theta^0)$ – додатно визначена матриця з мінімальним власним числом $\lambda_{min}(J_T(\theta^0)) \geq \lambda_*$, для деякого $r > 0$ розглянемо подію

$$\Omega_1 \cap \Omega_2 \cap \Omega_3 = \left\{ \left|o_p^{(1)}(1)\right| \leq r,\ \left|o_p^{(2)}(1)\right| \leq r,\ \|\hat{w}_T\| \leq r \right\} \subset$$
$$\subset \left\{ |\lambda_{min}(\mathcal{H}_T(\hat{w}_T)) - \lambda_{min}(J_T(\theta^0))| \leq \frac{\lambda_*}{2} \right\} =$$
$$= \left\{ \lambda_{min}(J_T(\theta^0)) - \frac{\lambda_*}{2} \leq \lambda_{min}(\mathcal{H}_T(\hat{w}_T)) \leq \lambda_{min}(J_T(\theta^0)) + \frac{\lambda_*}{2} \right\} \subset$$
$$\subset \left\{ \lambda_{min}(\mathcal{H}_T(\hat{w}_T)) \geq \lambda_{min}(J_T(\theta^0)) - \frac{\lambda_*}{2} \right\} \subset \left\{ \lambda_{min}(\mathcal{H}_T(\hat{w}_T)) \geq \frac{\lambda_*}{2} \right\}.$$

Далі, отримуємо

$$P\{\overline{\Omega_1 \cap \Omega_2 \cap \Omega_3}\} \leq P\{\overline{\Omega_1}\} + P\{\overline{\Omega_2}\} + P\{\overline{\Omega_3}\} =$$
$$= P\left\{\left|o_p^{(1)}(1)\right| > r\right\} + P\left\{\left|o_p^{(2)}(1)\right| > r\right\} + P\left\{\|\hat{w}_T\| > r\right\}.$$

Для довільного $\varepsilon > 0$ для $T > T_0$

$$P\left\{\left|o_p^{(1)}(1)\right| > r\right\} \leq \frac{\varepsilon}{3},\ \text{та}\ P\left\{\left|o_p^{(2)}(1)\right| > r\right\} \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Тоді, якщо для $T > T_0$ $P\{\|\hat{w}_T\| > r\} \leq \frac{\varepsilon}{3}$ за умови **C**, то

$$P\left\{\left|o_p^{(1)}(1)\right| > r\right\} + P\left\{\left|o_p^{(2)}(1)\right| > r\right\} + P\left\{\|\hat{w}_T\| > r\right\} \leq \varepsilon,$$

а, отже, для $T > T_0$

$$P\{\Omega_1 \cap \Omega_2 \cap \Omega_3\} > 1 - \varepsilon.$$

Це означає, що нормована ОНК $\hat{w}_T$ з ймовірністю, що прямує до 1 при $T \to \infty$, є єдиним розв'язком системи рівнянь (3.10), оскільки матриця $\mathcal{H}_T(\hat{w}_T)$ є додатно визначеною, і функціонал (3.9) має єдиним екстремум (мінімум) в точці $\hat{w}_T$. $\square$

Зауваження. *Оскільки* $-T^{-1}\Phi(\hat{u}_T) = M_T(\hat{w}_T) = 0$, *де* $\hat{w}_T = T^{-1}\hat{u}_T$, $\hat{u}_T = d_T(\theta)(\hat{\theta}_T - \theta)$, *то із единості оцінки* $\hat{w}_T$ *в кулі* $V(r)$ *з великою ймовірністю при* $T > T_0$ *для деякого* $r > 0$ *випливає єдиність оцінки* $\hat{u}_T$ *з такою ж ймовірністю для* $T > T_0$ *в кулі* $V(Tr)$.

Перевіримо виконання умови **R5** для розглядуваної нами функції регресії (1.2), (1.3).

Для випадків, коли $i = l = 4k-3,\ i = l = 4k-2$, або $i = 4k-3,\ l = 4k-2$, або $i = 4k-2,\ l = 4k-3,\ g_i l(t-1, t_2; \theta) = 0$, де $k = \overline{1, N}$, і виконання **R5(iii)** є очевидним.

Для випадків, коли $i = 4k-3,\ l = 4k-1$ та $i = 4k-1,\ l = 4k-3$, $k = \overline{1, N}$, використовуючи попередні обчислення і беручи до уваги, що $w = (w_1, w_2, w_3, w_4, \ldots, w_{4N-3}, w_{4N-2}, w_{4N-1}, w_{4N})$, маємо:

$$\frac{T^2\Phi_{il,T}(w,0)}{d_{iT}^2(\theta)d_{lT}^2(\theta)} = \frac{T^2}{d_{iT}^2(\theta)d_{lT}^2(\theta)}\int_0^T\int_0^T\Big(f_{il}(t_1,t_2;w) - f_{il}(t_1,t_2;0)\Big)^2 dt_1dt_2 =$$
$$= \frac{T^2}{d_{iT}^2(\theta)d_{lT}^2(\theta)}\int_0^T\int_0^T\bigg(-t_1 sin\Big((\lambda_k^0 + Td_{4k-1,T}^{-1}(\theta)w_{4k-1,T})t_1 +$$
$$+(\mu_k^0 + Td_{4k,T}^{-1}(\theta)w_{4k,T})t_2\Big) + t_1 sin(\lambda_k^0 t_1 + \mu_k^0 t_2)\bigg)^2 dt_1dt_2 \leq$$
$$\leq \frac{4T^2}{d_{iT}^2(\theta)d_{lT}^2(\theta)}\int_0^T\int_0^T t_1^2 sin^2\frac{1}{2}\big(Td_{4k-1}^{-1}w_{4k-1}t_1 + Td_{4k}^{-1}w_{4k}t_2\big)dt_1dt_2 \leq$$
$$\leq \frac{4T^2}{d_{iT}^2(\theta)d_{lT}^2(\theta)}\int_0^T\int_0^T t_1^2\Big(\frac{1}{2}\big(Td_{4k-1}^{-1}w_{4k-1}t_1 + Td_{4k}^{-1}w_{4k}t_2\big)\Big)^2 dt_1dt_2 \leq k_{il}\|w\|^2.$$

Аналогічно, для випадків, коли $i = 4k-3,\ l = 4k$ та $i = 4k,\ l = 4k-3$, $k = \overline{1, N}$,

$$\frac{T^2\Phi_{il,T}(w,0)}{d_{iT}^2(\theta)d_{lT}^2(\theta)} = \frac{T^2}{d_{iT}^2(\theta)d_{lT}^2(\theta)}\int_0^T\int_0^T\Big(f_{il}(t_1,t_2;w) - f_{il}(t_1,t_2;0)\Big)^2 dt_1dt_2 =$$

$$= \frac{T^2}{d_{iT}^2(\theta)d_{lT}^2(\theta)} \int_0^T \int_0^T \Big(-t_2 sin\Big((\lambda_k^0 + Td_{4k-1,T}^{-1}(\theta)w_{4k-1,T})t_1 +$$

$$+(\mu_k^0 + Td_{4k,T}^{-1}(\theta)w_{4k,T})t_2\Big) + t_2 sin(\lambda_k^0 t_1 + \mu_k^0 t_2)\Big)^2 dt_1 dt_2 \leq$$

$$\leq \frac{4T^2}{d_{iT}^2(\theta)d_{lT}^2(\theta)} \int_0^T \int_0^T t_2^2 sin^2 \frac{1}{2}\big(Td_{4k-1}^{-1}w_{4k-1}t_1 + Td_{4k}^{-1}w_{4k}t_2\big)dt_1 dt_2 \leq$$

$$\leq \frac{4T^2}{d_{iT}^2(\theta)d_{lT}^2(\theta)} \int_0^T \int_0^T t_2^2 \Big(\frac{1}{2}\big(Td_{4k-1}^{-1}w_{4k-1}t_1 + Td_{4k}^{-1}w_{4k}t_2\big)\Big)^2 dt_1 dt_2 \leq k_{il}\|w\|^2.$$

Аналогічно, для випадків, коли $i = 4k-2,\ l = 4k-1$ та $i = 4k-1,\ l = 4k-2$, $k = \overline{1,N}$,

$$\frac{T^2\Phi_{il,T}(w,0)}{d_{iT}^2(\theta)d_{lT}^2(\theta)} = \frac{T^2}{d_{iT}^2(\theta)d_{lT}^2(\theta)} \int_0^T \int_0^T \Big(f_{il}(t_1,t_2;w) - f_{il}(t_1,t_2;0)\Big)^2 dt_1 dt_2 =$$

$$= \frac{T^2}{d_{iT}^2(\theta)d_{lT}^2(\theta)} \int_0^T \int_0^T \Big(t_1 cos\Big((\lambda_k^0 + Td_{4k-1,T}^{-1}(\theta)w_{4k-1,T})t_1 +$$

$$+(\mu_k^0 + Td_{4k,T}^{-1}(\theta)w_{4k,T})t_2\Big) - t_1 cos(\lambda_k^0 t_1 + \mu_k^0 t_2)\Big)^2 dt_1 dt_2 \leq$$

$$\leq \frac{4T^2}{d_{iT}^2(\theta)d_{lT}^2(\theta)} \int_0^T \int_0^T t_1^2 sin^2 \frac{1}{2}\big(Td_{4k-1}^{-1}w_{4k-1}t_1 + Td_{4k}^{-1}w_{4k}t_2\big)dt_1 dt_2 \leq$$

$$\leq \frac{4T^2}{d_{iT}^2(\theta)d_{lT}^2(\theta)} \int_0^T \int_0^T t_1^2 \Big(\frac{1}{2}\big(Td_{4k-1}^{-1}w_{4k-1}t_1 + Td_{4k}^{-1}w_{4k}t_2\big)\Big)^2 dt_1 dt_2 \leq k_{il}\|w\|^2.$$

Аналогічно, для випадків, коли $i = 4k,\ l = 4k-2$ та $i = 4k-2,\ l = 4k$, $k = \overline{1,N}$,

$$\frac{T^2\Phi_{il,T}(w,0)}{d_{iT}^2(\theta)d_{lT}^2(\theta)} = \frac{T^2}{d_{iT}^2(\theta)d_{lT}^2(\theta)} \int_0^T \int_0^T \Big(f_{il}(t_1,t_2;w) - f_{il}(t_1,t_2;0)\Big)^2 dt_1 dt_2 =$$

$$= \frac{T^2}{d_{iT}^2(\theta)d_{lT}^2(\theta)} \int_0^T \int_0^T \Big(t_2 cos\Big((\lambda_k^0 + Td_{4k-1,T}^{-1}(\theta)w_{4k-1,T})t_1 +$$

$$+(\mu_k^0 + Td_{4k,T}^{-1}(\theta)w_{4k,T})t_2\Big) - t_2 cos(\lambda_k^0 t_1 + \mu_k^0 t_2)\Big)^2 dt_1 dt_2 \leq$$

$$\leq \frac{4T^2}{d_{iT}^2(\theta)d_{lT}^2(\theta)} \int_0^T \int_0^T t_2^2 sin^2 \frac{1}{2}\big(Td_{4k-1}^{-1}w_{4k-1}t_1 + Td_{4k}^{-1}w_{4k}t_2\big)dt_1 dt_2 \leq$$

$$\leq \frac{4T^2}{d_{iT}^2(\theta)d_{lT}^2(\theta)} \int_0^T \int_0^T t_2^2 \Big(\frac{1}{2}\big(Td_{4k-1}^{-1}w_{4k-1}t_1 + Td_{4k}^{-1}w_{4k}t_2\big)\Big)^2 dt_1 dt_2 \leq k_{il}\|w\|^2.$$

Для випадку, коли $i = 4k-1,\ l = 4k-1$, $k = \overline{1,N}$,

$$\frac{T^2\Phi_{4k-1,4k-1,T}(w,0)}{d^4_{4k-1,T}(\theta)} = \frac{T^2}{d^4_{4k-1,T}(\theta)}\int_0^T\int_0^T t_1^4\Big(A_k^0 cos\big((\lambda_k^0 + Td^{-1}_{4k-1,T}(\theta)w_{4k-1})t_1 +$$
$$+(\mu_k^0 + Td^{-1}_{4k,T}(\theta)w_{4k})t_2\big) - A_k^0 cos(\lambda_k^0 t_1 + \mu_k^0 t_2) +$$
$$+B_k^0 sin\Big((\lambda_k^0 + Td^{-1}_{4k-1,T}(\theta)w_{4k-1})t_1 + (\mu_k^0 + Td^{-1}_{4k,T}(\theta)w_{4k})t_2\Big) -$$

$$-B_k^0 sin(\lambda_k^0 t_1 + \mu_k^0 t_2) +$$
$$+Td^{-1}_{4k-3,T}(\theta)w_{4k-3}\cdot cos\Big((\lambda_k^0 + Td^{-1}_{4k-1,T}(\theta)w_{4k-1})t_1 + (\mu_k^0 + Td^{-1}_{4k,T}(\theta)w_{4k})t_2\Big) +$$
$$+Td^{-1}_{4k-2,T}(\theta)w_{4k-2}\cdot sin\Big((\lambda_k^0 + Td^{-1}_{4k-1,T}(\theta)w_{4k-1})t_1 + (\mu_k^0 + Td^{-1}_{4k,T}(\theta)w_{4k})t_2\Big)\Big)^2 \times$$
$$\times dt_1 dt_2 \le$$
$$\le \frac{T^2}{d^4_{4k-1,T}(\theta)}\int_0^T\int_0^T t_1^4\Big(\big(|A_k^0| + |B_k^0|\big)\cdot\big(Td^{-1}_{4k-1}|w_{4k-1}|t_1 + Td^{-1}_{4k}|w_{4k}|t_2\big) +$$
$$+Td^{-1}_{4k-3,T}(\theta)|w_{4k-3}| + Td^{-1}_{4k-2,T}(\theta)|w_{4k-2}|\Big)^2 dt_1 dt_2.$$

Використовуючи нерівності $(a+b+c)^2 \le 3(a^2+b^2+c^2)$ і $(a+b)^2 \le 2(a^2+b^2)$, знаходимо

$$\frac{T^2\Phi_{4k-1,4k-1,T}(w,0)}{d^4_{4k-1,T}(\theta)} \le 6\big(|A_k^0| + |B_k^0|\big)^2\Big(\frac{T^{12}}{8d^6_{4k-1,T}(\theta)}|w_{4k-1}|^2 +$$
$$+\frac{T^{12}}{24d^2_{4k,T}(\theta)d^4_{4k-1,T}(\theta)}|w_{4k}|^2\Big) + \frac{1}{2}\frac{T^{10}}{d^4_{4k-1,T}(\theta)d^2_{4k-3,T}(\theta)}|w_{4k-3}|^2 +$$
$$+\frac{1}{2}\frac{T^{10}}{d^4_{4k-1,T}(\theta)d^2_{4k-2,T}(\theta)}|w_{4k-2}|^2 \le k_{4k-1,4k-1}\|w\|^2.$$

Аналогічно, для випадку, коли $i = 4k,\ l = 4k,\ k = \overline{1,N}$,

$$\frac{T^2\Phi_{4k,4k,T}(w,0)}{d^4_{4k,T}(\theta)} = \frac{T^2}{d^4_{4k,T}(\theta)}\int_0^T\int_0^T t_2^4\Big(A_k^0 cos\big((\lambda_k^0 + Td^{-1}_{4k-1,T}(\theta)w_{4k-1})t_1 +$$
$$+(\mu_k^0 + Td^{-1}_{4k,T}(\theta)w_{4k})t_2\big) - A_k^0 cos(\lambda_k^0 t_1 + \mu_k^0 t_2) +$$
$$+B_k^0 sin\Big((\lambda_k^0 + Td^{-1}_{4k-1,T}(\theta)w_{4k-1})t_1 + (\mu_k^0 + Td^{-1}_{4k,T}(\theta)w_{4k})t_2\Big) -$$
$$-B_k^0 sin(\lambda_k^0 t_1 + \mu_k^0 t_2) +$$
$$+Td^{-1}_{4k-3,T}(\theta)w_{4k-3}\cdot cos\Big((\lambda_k^0 + Td^{-1}_{4k-1,T}(\theta)w_{4k-1})t_1 + (\mu_k^0 + Td^{-1}_{4k,T}(\theta)w_{4k})t_2\Big) +$$
$$+Td^{-1}_{4k-2,T}(\theta)w_{4k-2}\cdot sin\Big((\lambda_k^0 + Td^{-1}_{4k-1,T}(\theta)w_{4k-1})t_1 + (\mu_k^0 + Td^{-1}_{4k,T}(\theta)w_{4k})t_2\Big)\Big)^2 \times$$

$$\times dt_1 dt_2 \leq$$

$$\leq \frac{T^2}{d^4_{4k,T}(\theta)} \int_0^T \int_0^T t_2^4 \Big(\big(|A_k^0| + |B_k^0|\big) \cdot \big(Td^{-1}_{4k-1}|w_{4k-1}|t_1 + Td^{-1}_{4k}|w_{4k}|t_2\big) +$$

$$+Td^{-1}_{4k-3,T}(\theta)|w_{4k-3}| + Td^{-1}_{4k-2,T}(\theta)|w_{4k-2}|\Big)^2 dt_1 dt_2 \leq$$

$$\leq 6\big(|A_k^0| + |B_k^0|\big)^2 \left(\frac{T^{12}}{8d^2_{4k-1,T}(\theta)d^4_{4k,T}(\theta)}|w_{4k-1}|^2 + \frac{T^{12}}{24d^6_{4k,T}(\theta)}|w_{4k}|^2 \right) +$$

$$+\frac{1}{2}\frac{T^{10}}{d^4_{4k,T}(\theta)d^2_{4k-3,T}(\theta)}|w_{4k-3}|^2 + \frac{1}{2}\frac{T^{10}}{d^4_{4k,T}(\theta)d^2_{4k-2,T}(\theta)}|w_{4k-2}|^2 \leq k_{4k,4k}\|w\|^2.$$

І, нарешті, для випадку $i = 4k-1,\ l = 4k$, та $i = 4k,\ l = 4k-1, k = \overline{1, N}$,

$$\frac{T^2\Phi_{4k-1,4k,T}(w,0)}{d^2_{4k-1,T}(\theta)d^2_{4k,T}(\theta)} = \frac{T^2}{d^2_{4k-1,T}(\theta)d^2_{4k,T}(\theta)} \int_0^T \int_0^T t_1^2 t_2^2 \Big(A_k^0 cos\big((\lambda_k^0 + Td^{-1}_{4k-1,T}(\theta)\times$$

$$\times w_{4k-1})t_1 + (\mu_k^0 + Td^{-1}_{4k,T}(\theta)w_{4k})t_2\big) - A_k^0 cos(\lambda_k^0 t_1 + \mu_k^0 t_2) +$$

$$+B_k^0 sin\Big((\lambda_k^0 + Td^{-1}_{4k-1,T}(\theta)w_{4k-1})t_1 + (\mu_k^0 + Td^{-1}_{4k,T}(\theta)w_{4k})t_2\Big) -$$

$$-B_k^0 sin(\lambda_k^0 t_1 + \mu_k^0 t_2) +$$

$$+Td^{-1}_{4k-3,T}(\theta)w_{4k-3} \cdot cos\Big((\lambda_k^0 + Td^{-1}_{4k-1,T}(\theta)w_{4k-1})t_1 + (\mu_k^0 + Td^{-1}_{4k,T}(\theta)w_{4k})t_2\Big) +$$

$$+Td^{-1}_{4k-2,T}(\theta)w_{4k-2} \cdot sin\Big((\lambda_k^0 + Td^{-1}_{4k-1,T}(\theta)w_{4k-1})t_1 + (\mu_k^0 + Td^{-1}_{4k,T}(\theta)w_{4k})t_2\Big)\Big)^2 \times$$

$$\times dt_1 dt_2 \leq$$

$$\leq \frac{T^2}{d^2_{4k-1,T}(\theta)d^2_{4k,T}(\theta)} \int_0^T \int_0^T t_1^2 t_2^2 \Big(\big(|A_k^0| + |B_k^0|\big) \cdot \big(Td^{-1}_{4k-1}|w_{4k-1}|t_1 + Td^{-1}_{4k}|w_{4k}|t_2\big) +$$

$$+Td^{-1}_{4k-3,T}(\theta)|w_{4k-3}| + Td^{-1}_{4k-2,T}(\theta)|w_{4k-2}|\Big)^2 dt_1 dt_2 \leq$$

$$\leq 6\big(|A_k^0| + |B_k^0|\big)^2 \left(\frac{T^{12}}{24d^4_{4k-1,T}(\theta)d^2_{4k,T}(\theta)}|w_{4k-1}|^2 + \frac{T^{12}}{24d^2_{4k-1,T}(\theta)d^4_{4k,T}(\theta)}|w_{4k}|^2 \right) +$$

$$+\frac{3}{16}\frac{T^{10}}{d^2_{4k-1,T}(\theta)d^2_{4k,T}(\theta)d^2_{4k-3,T}(\theta)}|w_{4k-3}|^2 + \frac{3}{16}\frac{T^{10}}{d^2_{4k-1}(\theta)d^2_{4k,T}(\theta)d^2_{4k-2,T}(\theta)}|w_{4k-2}|^2 \leq$$

$$\leq k_{4k-1,4k}\|w\|^2.$$

Виконання нерівностей **R5(i)** і **R5(ii)** перевіряється аналогічно перевірці виконання умов **R3(i)** і **R3(ii)** попереднього розділу.

$J_T(\theta)$ для тригонометричної функції регресії (1.2), (1.3) збігається до блочно-діагональної матриці з блоками

$$J_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{B_k^0}{\sqrt{4((A_k^0)^2+(B_k^0)^2)/3}} & \frac{B_k^0}{\sqrt{4((A_k^0)^2+(B_k^0)^2)/3}} \\ 0 & 1 & \frac{-A_k^0}{\sqrt{4((A_k^0)^2+(B_k^0)^2)/3}} & \frac{-A_k^0}{\sqrt{4((A_k^0)^2+(B_k^0)^2)/3}} \\ \frac{B_k^0}{\sqrt{4((A_k^0)^2+(B_k^0)^2)/3}} & \frac{-A_k^0}{\sqrt{4((A_k^0)^2+(B_k^0)^2)/3}} & 1 & \frac{3}{4} \\ \frac{B_k^0}{\sqrt{4((A_k^0)^2+(B_k^0)^2)/3}} & \frac{-A_k^0}{\sqrt{4((A_k^0)^2+(B_k^0)^2)/3}} & \frac{3}{4} & 1 \end{bmatrix},$$

$$k = \overline{1, N}. \tag{3.23}$$

Застосуємо критерій Сільвестра для перевірки додатної визначеності матриці $J_T(\theta)$. Достатньо перевірити умови критерію для блоку J_k. Очевидно, мінори $\triangle_1 > 0$ та $\triangle_2 > 0$;

$$\triangle_3 = 1 - \frac{(A_k^0)^2 + (B_k^0)^2}{4((A_k^0)^2 + (B_k^0)^2)/3} = \frac{1}{4} > 0;$$

$$\triangle_4 = \frac{7}{16} - \frac{1}{2} \cdot \frac{(A_k^0)^2 + (B_k^0)^2}{4((A_k^0)^2 + (B_k^0)^2)/3} = \frac{1}{16} > 0.$$

Таким чином, всі головні мінори J_k строго додатні і, за критерієм Сільвестра, матриця є додатно визначеною. З цього випливає, що існує деяке T_0 таке, що для $T > T_0$ матриця $J_T(\theta^0)$ є додатно визначеною, і умову **R4** виконано.

Для тригонометричної моделі (1.1)-(1.3) за припущеннями **N**, **R1**, **R2** нормована оцінка $\hat{w}_T$ сильно консистентна (теорема 1), і, зокрема, умову слабкої консистентності **C** виконано.

4 Асимптотична нормальність оцінки найменших квадратів

В цьому розділі ми доводимо теорему про асимптотичну нормальність ОНК $\hat{\theta}_T$ в сенсі означення 2 і застосовуємо її для отримання асимптотичної нормальності ОНК $\hat{\theta}_T$ параметрів тригонометричної моделі.

Розглянемо нелінійну модель регресії (2.1) та введемо сім'ю матричних мір $\nu_T(d\lambda, d\mu; \theta)$ на $(\mathbb{R}^2, \mathfrak{B})$, де $\mathfrak{B} - \sigma$ - алгебра борелевих підмножин $\mathbb{R}^2$, з матричними щільностями

$$\left(\nu_T^{jl}(\lambda, \mu; \theta)\right)_{j,l=1}^q, \ \nu_T^{jl}(\lambda, \mu; \theta) =$$

$$= g_T^j(\lambda, \mu; \theta)\overline{g_T^l(\lambda, \mu; \theta)}\left(\int_{\mathbb{R}^2}\left|g_T^j(\lambda, \mu; \theta)\right|^2 d\lambda d\mu \int_{\mathbb{R}^2}\left|g_T^l(\lambda, \mu; \theta)\right|^2 d\lambda d\mu\right)^{-1/2},$$

$$g_T^j(\lambda, \mu; \theta) = \int_0^T\int_0^T e^{i(\lambda t_1 + \mu t_2)} g_j(t_1, t_2; \theta) dt_1 dt_2, \ j, l = \overline{1, q}.$$

Введемо умову

R6. Сім'я мір $\nu_T(d\lambda, d\mu; \theta)$ слабко збігається при $T \to \infty$ до додатно визначеної матричної міри $\nu(d\lambda, d\mu; \theta)$.

Умова **R6** означає, що для будь-якої обмеженої неперервної функції $a(\lambda, \mu), \ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$,

$$\int_{\mathbb{R}^2} a(\lambda, \mu)\nu_T(d\lambda, d\mu; \theta) \to \int_{\mathbb{R}^2} a(\lambda, \mu)\nu(d\lambda, d\mu; \theta), \ T \to \infty. \tag{4.1}$$

За умови **N(ii)** спектральна щільність $f(\lambda_1, \lambda_2), \ \lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ випадкового поля ε є обмеженою і неперервною функцією на $\mathbb{R}^2$, для якої виконано (4.1). Однієї умови **N(i)** не вистачає для того, щоб говорити про існування спектральної щільності f, для якої справедливе (4.1). У зв'язку з цим нам потрібна додаткова умова (див., наприклад, роботи [26, 27]).

NS. Випадкове поле $\varepsilon(t), \ t \in \mathbb{R}^2$, має спектральну щільність

$$f(\lambda_1, \lambda_2) = f(\|\lambda\|) = c(\alpha)\|\lambda\|^{\alpha-2} L_s\Big(\frac{1}{\|\lambda\|}\Big), \tag{4.2}$$

де $c(\alpha) = \dfrac{\Gamma(\frac{2-\alpha}{2})}{2^\alpha \pi \Gamma(\frac{\alpha}{2})}$, $\alpha \in (0, 1)$ і співпадає з α із умови **N(i)**, L_s – локально обмежена повільно змінна на нескінченності функція така, що f неперервна в кожній точці площини $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ і $f(\|\lambda\|) \uparrow \infty$ при $\|\lambda\| \to 0$.

Функції L з умови $N(i)$ та L_s з умови NS, взагалі кажучи, різні, але вони еквівалентні на несінченності [27]:

$$\lim_{r\to\infty}\frac{L(r)}{L_s(r)}=1.$$

В розділі 5 роботи [28] розглянуто декілька відносно простих прикладів, де вдається явно записати функції L та L_s з умов **N(i)** та **NS**.

Означення 3 *Міра $\nu(d\lambda,d\mu;\theta)$ називається спектральною мірою функції регресії $g(t_1,t_2;\theta)$ або, що те ж саме, спектральною мірою вектор-функції $\nabla g(t_1,t_2;\theta)$ [8].*

Отже, за умови **R6**

$$\int_{\mathbb{R}^2}\nu_T(d\lambda,d\mu;\theta)=\big(J_{jl,T}(\theta)\big)_{j,l=1}^{q}=J_T(\theta),$$

і коли $T\to\infty$, то $J_T(\theta)\to J(\theta)=\nu(\mathbb{R}^2;\theta)$ - додатно визначена матриця. Таким чином, з умови **R6** випливає умова **R4**.

Означення 4 *[29] Спектральна щільність f випадкового поля ε називається ν-припустимою, якщо вона інтегровна за мірою ν, тобто всі елементи матриці $\int_{\mathbb{R}^2}f(\lambda_1,\lambda_2)\nu(d\lambda_1,d\lambda_2;\theta)$ набувають скінченних значень, та для функції $a=f$ виконується (4.1).*

Теорема 4 *Нехай виконуються умови* **C**, **R3**, **R5**, **R6**, **N(ii)** *або* **NS**, *причому в другому випадку спектральна щільність f є ν-припустимою. Тоді оцінка $\hat{u}_\theta=d_T(\theta)(\theta_T-\theta)$ асимптотично нормальна з нульовим середнім та коваріаційною матрицею*

$$\gamma(\theta)=(2\pi)^2\Big(\int_{\mathbb{R}^2}\nu(d\lambda,d\mu;\theta)\Big)^{-1}\int_{\mathbb{R}^2}f(\lambda,\mu)\nu(d\lambda,d\mu;\theta)\Big(\int_{\mathbb{R}^2}\nu(d\lambda,d\mu;\theta)\Big)^{-1}. \tag{4.3}$$

Доведення. Використовуючи введені раніше вектори (2.7) та систему (2.10), а також позначення

$$b_{lT}=\frac{g_l(t_1,t_2;\theta)}{d_{lT}(\theta)}$$

отримуємо, що

$$L_T^i(u)=\int_0^T\int_0^T\big(\varepsilon(t_1,t_2)-\sum_{l=1}^{q}b_{lT}u_l\big)b_{iT}dt_1dt_2=0,$$

тобто

$$\int_0^T\int_0^T \varepsilon(t_1,t_2)b_{iT}dt_1dt_2 =$$
$$= \sum_{l=1}^q b_{lT}\int_0^T\int_0^T b_{lT}b_{iT}dt_1dt_2u_l = \sum_{l=1}^q J_{il,T}(\theta)u_l,\ i=\overline{1,q}.$$

Таким чином, отримуємо систему рівнянь відносно u:

$$J_T(\theta)u = d_T^{-1}\int_0^T\int_0^T \varepsilon(t_1,t_2)\nabla g(t_1,t_2;\theta)dt_1dt_2.$$

Звідки отримуємо

$$\tilde{u}_T = J_T^{-1}(\theta)\int_0^T\int_0^T \varepsilon(t_1,t_2)d_T^{-1}(\theta)\nabla g(t_1,t_2;\theta)dt_1dt_2 = J_T^{-1}(\theta)\zeta_T, \tag{4.4}$$

існування $J_T^{-1}(\theta)$ випливає з умови **R4**.

Випадковий вектор $\tilde{u}_T$ асиптотично нормальний $N(0;\gamma(\theta))$ при $T\to\infty$, де $\gamma(\theta)$ задано формулою (4.3). Коваріаційна матриця вектора $\tilde{u}_T$ має вигляд

$$\gamma_T = J_T^{-1}(\theta)\cdot\sigma_T^2(\theta)\cdot J_T^{-1}(\theta), \tag{4.5}$$

де $\sigma_T^2(\theta)$ – коваріаційна матриця вектора ζ_T. При $T\to\infty$

$$\gamma_T(\theta) =$$
$$= (2\pi)^2\Big(\int_{\mathbb{R}^2}\nu_T(d\lambda,d\mu;\theta)\Big)^{-1}\int_{\mathbb{R}^2}f(\lambda,\mu)\nu_T(d\lambda,d\mu;\theta)\Big(\int_{\mathbb{R}^2}\nu_T(d\lambda,d\mu;\theta)\Big)^{-1}\to$$
$$(2\pi)^2\Big(\int_{\mathbb{R}^2}\nu(d\lambda,d\mu;\theta)\Big)^{-1}\int_{\mathbb{R}^2}f(\lambda,\mu)\nu(d\lambda,d\mu;\theta)\Big(\int_{\mathbb{R}^2}\nu(d\lambda,d\mu;\theta)\Big)^{-1} = \gamma(\theta). \tag{4.6}$$

Наступні міркування повторюють міркування робіт [10, 11], і їх наведено тільки для повноти викладення доведення теореми 4.

Доведемо, що функція розподілу $F_T(y_1,y_2;\theta)$ випадкового вектору $\hat{u}_T = d_T(\theta)(\hat{\theta}_T-\theta)$ збігається при $T\to\infty$ до гауссівської функції розподілу $\Phi_{0,\gamma(\theta)}(y_1,y_2)$. Для цього покажемо, що для довільного $r>0$

$$\triangle_T(r) = P\{\|\hat{u}_T-\tilde{u}_T\|>r\}\to 0,\ T\to\infty. \tag{4.7}$$

Запишемо подію $A_T = \{\tilde{u}_T\in V^c(R-r)\}$, де R таке, що для $T>T_0$, завдяки асимптотичній нормальності $\tilde{u}_T$, виконується $P\{\overline{A}_T\}\le\frac{\varepsilon}{3}$, де $\varepsilon>0$ – фіксоване як завгодно мале число.

Також введемо подію

$$B_T = \Big\{\sup_{u\in V^c(R)}\|J_T^{-1}(\theta)\cdot(\Psi_T(u)-L_T(u))\|\le r\Big\}.$$

З теореми 2 (редукції) випливає, що для $T > T_0$

$$P\{\overline{B}_T\} = \{\sup_{u\in V^c(R)} \|J_T^{-1}(\theta)\cdot(\Psi_T(u) - L_T(u))\| > r\} \leq$$
$$\leq P\Big\{\lambda_{max}(J_T^{-1}(\theta))\cdot \sup_{u\in V^c(R)} \|\Psi_T(u) - L_T(u)\|\Big\rangle r\} =$$
$$= P\Big\{\frac{1}{\lambda_{min}(J_T(\theta))}\cdot \sup_{u\in V^c(R)} \|\Psi_T(u) - L_T(u)\|\Big\rangle r\} \leq$$
$$\leq P\Big\{\sup_{u\in V^c(R)} \|\Psi_T(u) - L_T(u)\| > \lambda_* r\Big\} \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Крім цього, розглянемо подію C_T, яка полягає в тому, що ОНК $\hat{u}_T$ є єдиним розв'язком системи рівнянь (2.8), до того ж, для $T > T_0$ $P\{\overline{C}_T\} \leq \frac{\varepsilon}{3}$ за теоремою 3.

Отримуємо, що для $T > T_0$

$$P\{A_T \cap B_T \cap C_T\} \geq 1 - \varepsilon. \tag{4.8}$$

Маємо далі

$$J_T^{-1}(\theta)L_T(u) = J_T^{-1}(\theta)\Big(\int_0^T\int_0^T \varepsilon(t_1,t_2)\cdot b_{iT}(\theta)dt_1dt_2\Big)_{i=1}^q -$$
$$-J_T^{-1}(\theta)\Big(\sum_{l=1}^q u_l \int_0^T\int_0^T b_{lT}\cdot b_{iT}(\theta)dt_1dt_2\Big)_{i=1}^q =$$
$$= \tilde{u}_T - J_T^{-1}(\theta)\Big(\sum_{l=1}^q u_l\cdot J_{il,T}(\theta)\Big)_{i=1}^q = \tilde{u}_T - u.$$

Якщо подія $A_T \cap B_T \cap C_T$ відбулася, то для $u \in V^c(R)$

$$\|u + J_T^{-1}(\theta)\Psi_T(u)\| = \|u + J_T^{-1}(\theta)(\Psi_T(u) - L_T(u)) + J_T^{-1}(\theta)L_T(u)\| =$$
$$= \|u + \tilde{u}_T - u + J_T^{-1}(\theta)(\Psi_T(u) - L_T(u))\| \leq$$
$$\leq \|\tilde{u}_T\| + \|J_T^{-1}(\theta)(\Psi_T(u) - L_T(u))\| \leq R - r + r = R,$$

тобто, $F_T(u) = u + J_T^{-1}(\theta)\Psi_T(u)$ – неперервне відображення $V^c(R)$ в $V^c(R)$.

Для доведення (4.7) використаємо теорему Брауера про нерухому точку.

Теорема Брауера. *Нехай F неперервне відображення $V^c(R)$ в себе. Тоді існує $x_0 \in V^c(R)$ таке, що $F(x_0) = x_0$.*

Застосуємо до $F_T(u)$ наведену теорему. Отримаємо, що існує точка $u_T^0 \in V^c(R)$ така, що $F_T(u_T^0) = u_T^0$, або, завдяки невиродженості $J_T^{-1}(\theta)$, $\Psi_T(u_T^0) = 0$. Завдяки виконанню події C_T, єдиним розв'язком системи рівнянь $\Psi_T(u_T^0) = 0$ в кулі $V_T^c(R)$ є нормована ОНК $\hat{u}_T$.

Отже, $\{A_T \cap B_T \cap C_T\} \subset \{\hat{u}_T \in V^c(R)\}$ і $P\{\hat{u}_T \in V^c(R)\} \geq 1 - \varepsilon$. Зауважимо, що з (4.8) випливає

$$1 - \varepsilon \leq P\{\{\hat{u}_T \in V^c(R)\} \cap B_T\} =$$
$$= P\left\{\{\hat{u}_T \in V^c(R)\} \cap \left\{\sup_{u \in V^c(R)} \|J_T^{-1}(\theta) \cdot (\Psi_T(u) - L_T(u))\| \leq r\right\}\right\} \leq$$
$$\leq P\{\|J_T^{-1}(\theta) \cdot (\Psi_T(\hat{u}_T) - L_T(\hat{u}_T))\| \leq r\} = P\{\|J_T^{-1}(\theta) \cdot L_T(\hat{u}_T)\| \leq r\} =$$
$$= P\{\|\tilde{u}_T - \hat{u}_T\| \leq r\}. \tag{4.9}$$

Отримуємо, що (4.7) випливає з (4.9). Позначимо

$$\prod(-\infty; y \pm \vec{\varepsilon}) = (-\infty; y_1 \pm \varepsilon) \times \cdots \times (-\infty; y_q \pm \varepsilon),\ \varepsilon > 0.$$

Враховуючи (4.7), отримуємо для функції розподілу $F_T(y, \theta) = P\{\hat{u}_T \in \prod(-\infty; y)\}$ для будь-яких $y \in \mathbb{R}^q$ та довільного $\varepsilon > 0$

$$F_T(y, \theta) \geq P\{\tilde{u}_T \in \prod(-\infty; y - \vec{\varepsilon})\} - \triangle_T(\varepsilon), \tag{4.10}$$
$$F_T(y, \theta) \leq P\{\tilde{u}_T \in \prod(-\infty; y + \vec{\varepsilon})\} + \triangle_T(\varepsilon). \tag{4.11}$$

Як було доведено раніше, для довільних $y \in \mathbb{R}^q$, $\varepsilon > 0$

$$|P\{\tilde{u}_T \in \prod(-\infty; y \pm \vec{\varepsilon})\} - \Phi_{0,\gamma(\theta)}(y \pm \vec{\varepsilon}]| \to 0,\ T \to \infty. \tag{4.12}$$

Нехай $\varphi(y, \theta)$ – гауссівська щільність, що відповідає функції розподілу $\Phi_{0,\gamma(\theta)}$. Оскільки $\lambda_{min}(\gamma(\theta)) = \underline{\lambda} > 0$, $\lambda_{max}(\gamma(\theta)) = \overline{\lambda} < \infty$, то

$$\varphi(y, \theta) \leq (2\pi\underline{\lambda})^{-q/2} \cdot \exp\left\{\frac{-\|y\|^2}{2\overline{\lambda}}\right\} = \varrho(\|y\|).$$

Для $A \in \mathfrak{B}^q$ ($\mathfrak{B}^q$ – σ-алгебра борелевих підмножин $\mathbb{R}^q$) та $\varepsilon > 0$ нехай

$$A_\varepsilon = \left\{x \in \mathbb{R}^q : \inf_{y \in A} \|x - y\| < \varepsilon\right\},$$
$$A_{-\varepsilon} = \mathbb{R}^q \setminus (\mathbb{R}^q \setminus A_\varepsilon).$$

Якщо $A = \prod(-\inf; y)$, то $A_{-\varepsilon} = \prod(-\inf; y - \vec{\varepsilon}]$, і $(\prod(\infty; y + \vec{\varepsilon}))_{-\varepsilon} = \prod(-\infty; y] = A^c$.

Далі нам знадобиться наступна теорема [30].

Теорема. *Нехай ϱ – невід'ємна диференційовна функція на $[0, \infty)$ така, що*

$$(1)\ \ b = \int_0^{+\infty} |\varrho'(\lambda)|\lambda^{q-1} d\lambda < \infty;$$
$$(2)\qquad \lim_{\lambda \to \infty} \varrho(\lambda) = 0.$$

Тоді для довільної опуклої множини $C \in \mathfrak{B}^q$ та для довільних $\varepsilon, \delta > 0$ має місце нерівність

$$\int_{C_\varepsilon \setminus C_{-\delta}} \varrho(\|\lambda\|) d\lambda \leq b \frac{2\pi^{q/2}}{\Gamma(q/2)} (\varepsilon + \delta).$$

Застосовуючи наведену теорему до $\varrho(\|y\|)$, для будь-якого $\psi \neq 0$ отримуємо

$$\left|\Phi_{0,\gamma(\theta)}(y) - \Phi_{0,\gamma(\theta)}(y + \vec{\psi})\right| = \int_{\Pi} \varphi(y, \theta) dy \leq b \cdot \big(\frac{2\pi^{q/2}}{\Gamma(q/2)}\big) \cdot |\psi|, \tag{4.13}$$

де $\prod = \begin{cases} \prod(-\infty, y + \vec{\psi}) \setminus A^c, & \text{якщо } \psi > 0, \\ A \setminus A_\psi, & \text{якщо } \psi < 0. \end{cases}$

Для будь-яких $y \in \mathbb{R}^q$ та для довільного $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} F_T(y, \theta) - \Phi_{0,\gamma(\theta)}(y) &\leq \triangle_T(\varepsilon) + P\{\tilde{u}_T \in \prod(-\infty; y + \vec{\varepsilon})\} - \Phi_{0,\gamma(\theta)}(y) \leq \\ &\leq \triangle_T(\varepsilon) + |P\{\tilde{u}_T \in \prod(-\infty; y + \vec{\varepsilon})\} - \Phi_{0,\gamma(\theta)}(y)| \leq \\ &\leq \triangle_T(\varepsilon) + |P\{\tilde{u}_T \in \prod(-\infty; y + \vec{\varepsilon})\} - \Phi_{0,\gamma(\theta)}(y + \vec{\varepsilon})| + \\ &+ |\Phi_{0,\gamma(\theta)}(y + \vec{\varepsilon}) - \Phi_{0,\gamma(\theta)}(y)|; \end{aligned} \tag{4.14}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{0,\gamma(\theta)}(y) - F_T(y, \theta) &\leq \triangle_T(\varepsilon) - P\{\tilde{u}_T \in \prod(-\infty; y - \vec{\varepsilon})\} + \Phi_{0,\gamma(\theta)}(y) \leq \\ &\leq \triangle_T(\varepsilon) + |\Phi_{0,\gamma(\theta)}(y) - P\{\tilde{u}_T \in \prod(-\infty; y - \vec{\varepsilon})\}| \leq \\ &\leq \triangle_T(\varepsilon) + |\Phi_{0,\gamma(\theta)}(y - \vec{\varepsilon}) - P\{\tilde{u}_T \in \prod(-\infty; y - \vec{\varepsilon})\}| + \\ &+ |\Phi_{0,\gamma(\theta)}(y) - \Phi_{0,\gamma(\theta)}(y - \vec{\varepsilon})|; \end{aligned} \tag{4.15}$$

Зі співвідношень (4.7)-(4.15), отримуємо, що

$$F_T(y, \theta) \to \Phi_{0,\gamma(\theta)}(y), \; T \to \infty. \qquad \square$$

Знайдемо компоненти $\nu_{jk}(d\lambda, d\mu; \theta^0)$ спектральної міри $\nu(d\lambda, d\mu; \theta^0)$ тригонометричної моделі регресії (1.1)-(1.3) зі співвідношень [8]

$$\begin{aligned} \lim_{T \to \infty} d_{jT}^{-1} d_{kT}^{-1} \int_0^T \int_0^T g_j(t_1 + h_1, t_2 + h_2) g_k(t_1, t_2) dt_1 dt_2 = \\ = G_{jk}(h_1, h_2) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{i(\lambda h_1 + \mu h_2)} \nu_{jk}(d\lambda, d\mu), \; j, k = \overline{1, 4N}. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Для нашої функції регресії (1.2), (1.3)

$$\lim_{T\to\infty} d^{-2}_{4k-3,T}\int_0^T\int_0^T g_{4k-3}(t_1+h_1,t_2+h_2)g_{4k-3}(t_1,t_2)dt_1dt_2 =$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{\int_0^T\int_0^T cos(\lambda_k(t_1+h_1)+\mu_k(t_2+h_2))cos(\lambda_k t_1+\mu_k t_2)dt_1dt_2}{\frac{T^2}{2}+O(1)}=$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{\frac{1}{2}T^2cos(\lambda_k h_1+\mu_k h_2)+O(1)}{\frac{T^2}{2}+O(1)}=cos(\lambda_k h_1+\mu_k h_2)=a_k;$$

$$\lim_{T\to\infty} d^{-1}_{4k-3,T}d^{-1}_{4k-2,T}\int_0^T\int_0^T g_{4k-3}(t_1+h_1,t_2+h_2)g_{4k-2}(t_1,t_2)dt_1dt_2 =$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{\int_0^T\int_0^T cos(\lambda_k(t_1+h_1)+\mu_k(t_2+h_2))sin(\lambda_k t_1+\mu_k t_2)dt_1dt_2}{\sqrt{\frac{T^2}{2}+O(1)}\sqrt{\frac{T^2}{2}-O(1)}}=$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{-\frac{T^2}{2}sin(\lambda_k h_1+\mu_k h_2)-O(1)}{\sqrt{\frac{T^2}{2}+O(1)}\sqrt{\frac{T^2}{2}-O(1)}}=-sin(\lambda_k h_1+\mu_k h_2)=-b_k;$$

$$\lim_{T\to\infty} d^{-1}_{4k-3,T}d^{-1}_{4k-1,T}\int_0^T\int_0^T g_{4k-3}(t_1+h_1,t_2+h_2)g_{4k-1}(t_1,t_2)dt_1dt_2 =$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{\int_0^T\int_0^T cos(\lambda_k(t_1+h_1)+\mu_k(t_2+h_2))}{\sqrt{\frac{T^2}{2}+O(1)}\sqrt{\frac{(A_k^2+B_k^2)T^4}{6}+O(T^2)}}\times$$

$$\times(-t_1A_k sin(\lambda_k t_1+\mu_k t_2)+t_1B_k cos(\lambda_k t_1+\mu_k t_2))dt_1dt_2=$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{\frac{A_kT^3}{4}sin(\lambda_k h_1+\mu_k h_2)+\frac{B_kT^3}{4}cos(\lambda_k h_1+\mu_k h_2)+O(T)}{\sqrt{\frac{T^2}{2}+O(1)}\sqrt{\frac{(A_k^2+B_k^2)T^4}{6}+O(T^2)}}=$$

$$=\sqrt{\frac{3}{4(A_k^2+B_k^2)}}\big(A_k sin(\lambda_k h_1+\mu_k h_2)+B_k cos(\lambda_k h_1+\mu_k h_2)\big)=C_k;$$

$$\lim_{T\to\infty} d^{-1}_{4k-3,T}d^{-1}_{4k,T}\int_0^T\int_0^T g_{4k-3}(t_1+h_1,t_2+h_2)g_{4k}(t_1,t_2)dt_1dt_2 =$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{\int_0^T\int_0^T cos(\lambda_k(t_1+h_1)+\mu_k(t_2+h_2))}{\sqrt{\frac{T^2}{2}+O(1)}\sqrt{\frac{(A_k^2+B_k^2)T^4}{6}+O(T^2)}}\times$$

$$\times(-t_2A_k sin(\lambda_k t_1+\mu_k t_2)+t_2B_k cos(\lambda_k t_1+\mu_k t_2))dt_1dt_2=$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{\frac{A_kT^3}{4}sin(\lambda_k h_1+\mu_k h_2)+\frac{B_kT^3}{4}cos(\lambda_k h_1+\mu_k h_2)+O(T)}{\sqrt{\frac{T^2}{2}+O(1)}\sqrt{\frac{(A_k^2+B_k^2)T^4}{6}+O(T^2)}}=$$

$$= \sqrt{\frac{3}{4(A_k^2+B_k^2)}}\big(A_k sin(\lambda_k h_1+\mu_k h_2)+B_k cos(\lambda_k h_1+\mu_k h_2)\big)=C_k;$$

$$\lim_{T\to\infty} d_{4k-2,T}^{-1} d_{4k-3,T}^{-1}\int_0^T\int_0^T g_{4k-2}(t_1+h_1,t_2+h_2)g_{4k-3}(t_1,t_2)dt_1dt_2=$$
$$=\lim_{T\to\infty}\frac{\int_0^T\int_0^T sin(\lambda_k(t_1+h_1)+\mu_k(t_2+h_2))cos(\lambda_k t_1+\mu_k t_2)dt_1dt_2}{\sqrt{\frac{T^2}{2}+O(1)}\sqrt{\frac{T^2}{2}-O(1)}}=$$
$$=\lim_{T\to\infty}\frac{\frac{T^2}{2}sin(\lambda_k h_1+\mu_k h_2)-O(1)}{\sqrt{\frac{T^2}{2}+O(1)}\sqrt{\frac{T^2}{2}-O(1)}}=sin(\lambda_k h_1+\mu_k h_2)=b_k;$$

$$\lim_{T\to\infty} d_{4k-2,T}^{-2}\int_0^T\int_0^T g_{4k-2}(t_1+h_1,t_2+h_2)g_{4k-2}(t_1,t_2)dt_1dt_2=$$
$$=\lim_{T\to\infty}\frac{\int_0^T\int_0^T sin(\lambda_k(t_1+h_1)+\mu_k(t_2+h_2))sin(\lambda_k t_1+\mu_k t_2)dt_1dt_2}{\frac{T^2}{2}+O(1)}=$$
$$=\lim_{T\to\infty}\frac{\frac{1}{2}T^2cos(\lambda_k h_1+\mu_k h_2)-O(1)}{\frac{T^2}{2}+O(1)}=cos(\lambda_k h_1+\mu_k h_2)=a_k;$$

$$\lim_{T\to\infty} d_{4k-2,T}^{-1} d_{4k-1,T}^{-1}\int_0^T\int_0^T g_{4k-2}(t_1+h_1,t_2+h_2)g_{4k-1}(t_1,t_2)dt_1dt_2=$$
$$=\lim_{T\to\infty}\frac{\int_0^T\int_0^T sin(\lambda_k(t_1+h_1)+\mu_k(t_2+h_2))}{\sqrt{\frac{T^2}{2}+O(1)}\sqrt{\frac{(A_k^2+B_k^2)T^4}{6}+O(T^2)}}\times$$
$$\times(-t_1A_k sin(\lambda_k t_1+\mu_k t_2)+t_1B_k cos(\lambda_k t_1+\mu_k t_2))dt_1dt_2=$$
$$=\lim_{T\to\infty}\frac{-\frac{A_kT^3}{4}cos(\lambda_k h_1+\mu_k h_2)+\frac{B_kT^3}{4}sin(\lambda_k h_1+\mu_k h_2)+O(T)}{\sqrt{\frac{T^2}{2}+O(1)}\sqrt{\frac{(A_k^2+B_k^2)T^4}{6}+O(T^2)}}=$$
$$=\sqrt{\frac{3}{4(A_k^2+B_k^2)}}\big(-A_k cos(\lambda_k h_1+\mu_k h_2)+B_k sin(\lambda_k h_1+\mu_k h_2)\big)=D_k;$$

$$\lim_{T\to\infty} d_{4k-2,T}^{-1} d_{4k,T}^{-1}\int_0^T\int_0^T g_{4k-2}(t_1+h_1,t_2+h_2)g_{4k}(t_1,t_2)dt_1dt_2=$$
$$=\lim_{T\to\infty}\frac{\int_0^T\int_0^T sin(\lambda_k(t_1+h_1)+\mu_k(t_2+h_2))}{\sqrt{\frac{T^2}{2}+O(1)}\sqrt{\frac{(A_k^2+B_k^2)T^4}{6}+O(T^2)}}\times$$
$$\times(-t_2A_k sin(\lambda_k t_1+\mu_k t_2)+t_2B_k cos(\lambda_k t_1+\mu_k t_2))dt_1dt_2=$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{-\frac{A_kT^3}{4}cos(\lambda_k h_1+\mu_k h_2)+\frac{B_kT^3}{4}sin(\lambda_k h_1+\mu_k h_2)+O(T)}{\sqrt{\frac{T^2}{2}+O(1)}\sqrt{\frac{(A_k^2+B_k^2)T^4}{6}+O(T^2)}} =$$

$$= \sqrt{\frac{3}{4(A_k^2+B_k^2)}}\big(-A_k cos(\lambda_k h_1+\mu_k h_2)+B_k sin(\lambda_k h_1+\mu_k h_2)\big) = D_k;$$

$$\lim_{T\to\infty} d^{-1}_{4k-1,T} d^{-1}_{4k-3,T} \int_0^T \int_0^T g_{4k-1}(t_1+h_1, t_2+h_2) g_{4k-3}(t_1,t_2) dt_1 dt_2 =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{\int_0^T \int_0^T cos(\lambda_k t_1+\mu_k t_2)}{\sqrt{\frac{T^2}{2}+O(1)}\sqrt{\frac{(A_k^2+B_k^2)T^4}{6}+O(T^2)}} \times$$

$$\times(-(t_1+h_1)A_k sin(\lambda_k(t_1+h_1)+\mu_k(t_2+h_2))+$$

$$+(t_1+h_1)B_k cos(\lambda_k(t_1+h_1)+\mu_k(t_2+h_2)))dt_1 dt_2 =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{\frac{-A_k+B_k}{2}\Big(\frac{T^3}{2}+T^2 h_1\Big)\big(sin(\lambda_k h_1+\mu_k h_2)+cos(\lambda_k h_1+\mu_k h_2)\big)+O(T)}{\sqrt{\frac{T^2}{2}+O(1)}\sqrt{\frac{(A_k^2+B_k^2)T^4}{6}+O(T^2)}} =$$

$$= \sqrt{\frac{3}{4(A_k^2+B_k^2)}}\big(-A_k sin(\lambda_k h_1+\mu_k h_2)+B_k cos(\lambda_k h_1+\mu_k h_2)\big) = C'_k;$$

$$\lim_{T\to\infty} d^{-1}_{4k-1,T} d^{-1}_{4k-2,T} \int_0^T \int_0^T g_{4k-1}(t_1+h_1, t_2+h_2) g_{4k-2}(t_1,t_2) dt_1 dt_2 =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{\int_0^T \int_0^T sin(\lambda_k t_1+\mu_k t_2)}{\sqrt{\frac{T^2}{2}+O(1)}\sqrt{\frac{(A_k^2+B_k^2)T^4}{6}+O(T^2)}} \times$$

$$\times\big(-(t_1+h_1)A_k sin(\lambda_k(t_1+h_1)+\mu_k(t_2+h_2))+$$

$$+(t_1+h_1)B_k cos(\lambda_k(t_1+h_1)+\mu_k(t_2+h_2))\big)dt_1 dt_2 =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{-\frac{A_kT^3}{4}cos(\lambda_k h_1+\mu_k h_2)-\frac{B_kT^3}{4}sin(\lambda_k h_1+\mu_k h_2)+O(T)}{\sqrt{\frac{T^2}{2}+O(1)}\sqrt{\frac{(A_k^2+B_k^2)T^4}{6}+O(T^2)}} =$$

$$= \sqrt{\frac{3}{4(A_k^2+B_k^2)}}\big(-A_k cos(\lambda_k h_1+\mu_k h_2)-B_k sin(\lambda_k h_1+\mu_k h_2)\big) = D'_k;$$

$$\lim_{T\to\infty} d^{-2}_{4k-1,T} \int_0^T \int_0^T g_{4k-1}(t_1+h_1, t_2+h_2) g_{4k-1}(t_1,t_2) dt_1 dt_2 =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{\int_0^T \int_0^T (-t_1 A_k sin(\lambda_k t_1+\mu_k t_2)+t_1 B_k cos(\lambda_k t_1+\mu_k t_2))}{\frac{(A_k^2+B_k^2)T^4}{6}+O(T^2)} \times$$

$$\times\Big((-t_1+h_1)A_k sin(\lambda_k(t_1+h_1)+\mu_k(t_2+h_2))+$$
$$+(t_1+h_1)B_k cos(\lambda_k(t_1+h_1)+\mu_k(t_2+h_2))\Big)dt_1dt_2=$$
$$=\lim_{T\to\infty}\frac{\big(\frac{T^4}{6}+\frac{T^3h_1}{2}\big)\big(A_k^2+B_k^2\big)cos(\lambda_k h_1+\mu_k h_2)+O(T^2)}{\frac{(A_k^2+B_k^2)T^4}{6}+O(T^2)}=$$
$$=cos(\lambda_k h_1+\mu_k h_2)=a_k;$$

$$\lim_{T\to\infty} d_{4k-1,T}^{-1}d_{4k,T}^{-1}\int_0^T\int_0^T g_{4k-1}(t_1+h_1,t_2+h_2)g_{4k}(t_1,t_2)dt_1dt_2=$$
$$=\lim_{T\to\infty}\frac{\int_0^T\int_0^T(-t_2A_k sin(\lambda_k t_1+\mu_k t_2)+t_2B_k cos(\lambda_k t_1+\mu_k t_2))}{\frac{(A_k^2+B_k^2)T^4}{6}+O(T^2)}\times$$
$$\times\Big((-t_1+h_1)A_k sin(\lambda_k(t_1+h_1)+\mu_k(t_2+h_2))+$$
$$+(t_1+h_1)B_k cos(\lambda_k(t_1+h_1)+\mu_k(t_2+h_2))\Big)dt_1dt_2=$$
$$=\lim_{T\to\infty}\frac{\frac{1}{8}\big(T^4+T^3\big)\big(A_k^2+B_k^2\big)cos(\lambda_k h_1+\mu_k h_2)+O(T^2)}{\frac{(A_k^2+B_k^2)T^4}{6}+O(T^2)}=$$
$$=\frac{3}{4}cos(\lambda_k h_1+\mu_k h_2)=\frac{3}{4}a_k;$$

$$\lim_{T\to\infty} d_{4k,T}^{-1}d_{4k-3,T}^{-1}\int_0^T\int_0^T g_{4k}(t_1+h_1,t_2+h_2)g_{4k-3}(t_1,t_2)dt_1dt_2=$$
$$=\lim_{T\to\infty}\frac{\int_0^T\int_0^T cos(\lambda_k t_1+\mu_k t_2)}{\sqrt{\frac{T^2}{2}+O(1)}\sqrt{\frac{(A_k^2+B_k^2)T^4}{6}+O(T^2)}}\times$$
$$\times(-(t_2+h_2)A_k sin(\lambda_k(t_1+h_1)+\mu_k(t_2+h_2))+$$
$$+(t_2+h_2)B_k cos(\lambda_k(t_1+h_1)+\mu_k(t_2+h_2)))dt_1dt_2=$$
$$=\lim_{T\to\infty}\frac{\frac{-A_k+B_k}{2}\Big(\frac{T^3}{2}+T^2h_2\Big)\big(sin(\lambda_k h_1+\mu_k h_2)+cos(\lambda_k h_1+\mu_k h_2)\big)+O(T)}{\sqrt{\frac{T^2}{2}+O(1)}\sqrt{\frac{(A_k^2+B_k^2)T^4}{6}+O(T^2)}}=$$
$$=\sqrt{\frac{3}{4(A_k^2+B_k^2)}}\big(-A_k sin(\lambda_k h_1+\mu_k h_2)+B_k cos(\lambda_k h_1+\mu_k h_2)\big)=C_k';$$

$$\lim_{T\to\infty} d_{4k,T}^{-1}d_{4k-2,T}^{-1}\int_0^T\int_0^T g_{4k}(t_1+h_1,t_2+h_2)g_{4k-2}(t_1,t_2)dt_1dt_2=$$
$$=\lim_{T\to\infty}\frac{\int_0^T\int_0^T sin(\lambda_k t_1+\mu_k t_2)}{\sqrt{\frac{T^2}{2}+O(1)}\sqrt{\frac{(A_k^2+B_k^2)T^4}{6}+O(T^2)}}\times$$

$$\times\big(-(t_2+h_2)A_k sin(\lambda_k(t_1+h_1)+\mu_k(t_2+h_2))+$$
$$+(t_2+h_2)B_k cos(\lambda_k(t_1+h_1)+\mu_k(t_2+h_2))\big)dt_1dt_2 =$$
$$=\lim_{T\to\infty}\frac{-\frac{A_kT^3}{4}cos(\lambda_kh_1+\mu_kh_2)-\frac{B_kT^3}{4}sin(\lambda_kh_1+\mu_kh_2)+O(T)}{\sqrt{\frac{T^2}{2}+O(1)}\sqrt{\frac{(A_k^2+B_k^2)T^4}{6}+O(T^2)}}=$$
$$=\sqrt{\frac{3}{4(A_k^2+B_k^2)}}\big(-A_k cos(\lambda_kh_1+\mu_kh_2)-B_k sin(\lambda_kh_1+\mu_kh_2)\big)=D_k';$$

$$\lim_{T\to\infty} d_{4k,T}^{-1}d_{4k-1,T}^{-1}\int_0^T\int_0^T g_{4k}(t_1+h_1,t_2+h_2)g_{4k-1}(t_1,t_2)dt_1dt_2 =$$
$$=\lim_{T\to\infty}\frac{\int_0^T\int_0^T(-t_1A_k sin(\lambda_kt_1+\mu_kt_2)+t_1B_k cos(\lambda_kt_1+\mu_kt_2))}{\frac{(A_k^2+B_k^2)T^4}{6}+O(T^2)}\times$$
$$\times\Big((-t_2+h_2)A_k sin(\lambda_k(t_1+h_1)+\mu_k(t_2+h_2))+$$
$$+(t_2+h_2)B_k cos(\lambda_k(t_1+h_1)+\mu_k(t_2+h_2))\Big)dt_1dt_2=$$
$$=\lim_{T\to\infty}\frac{\frac{1}{8}\big(T^4+T^3\big)\big(A_k^2+B_k^2\big)cos(\lambda_kh_1+\mu_kh_2)+O(T^2)}{\frac{(A_k^2+B_k^2)T^4}{6}+O(T^2)}=$$
$$=\frac{3}{4}cos(\lambda_kh_1+\mu_kh_2)=\frac{3}{4}a_k;$$

$$\lim_{T\to\infty} d_{4k,T}^{-2}\int_0^T\int_0^T g_{4k}(t_1+h_1,t_2+h_2)g_{4k}(t_1,t_2)dt_1dt_2 =$$
$$=\lim_{T\to\infty}\frac{\int_0^T\int_0^T(-t_2A_k sin(\lambda_kt_1+\mu_kt_2)+t_2B_k cos(\lambda_kt_1+\mu_kt_2))}{\frac{(A_k^2+B_k^2)T^4}{6}+O(T^2)}\times$$
$$\times\Big((-t_2+h_2)A_k sin(\lambda_k(t_1+h_1)+\mu_k(t_2+h_2))+$$
$$+(t_2+h_2)B_k cos(\lambda_k(t_1+h_1)+\mu_k(t_2+h_2))\Big)dt_1dt_2=$$
$$=\lim_{T\to\infty}\frac{\big(\frac{T^4}{6}+\frac{T^3h_2}{2}\big)\big(A_k^2+B_k^2\big)cos(\lambda_kh_1+\mu_kh_2)+O(T^2)}{\frac{(A_k^2+B_k^2)T^4}{6}+O(T^2)}=$$
$$=cos(\lambda_kh_1+\mu_kh_2)=a_k.$$

Таким чином отримуємо, що матриця $G=(G_{jk})_{j,k=1}^{4N}$ є блочно-діагональною матрицею з блоками

$$G_k=\begin{bmatrix} a_k & -b_k & C_k & C_k\\ b_k & a_k & D_k & D_k\\ C_k' & D_k' & a_k & \frac{3}{4}a_k\\ C_k' & D_k' & \frac{3}{4}a_k & a_k\end{bmatrix},\ k=\overline{1,N}. \tag{4.17}$$

Зі співвідношень (4.16) випливає, що шукана спектральна міра тригонометричної функції регресії (1.2), (1.3) є блочно-діагональною матрицею з блоками

$$\nu_k(d\lambda, d\mu; \theta^0) = \begin{bmatrix} \delta_k & i\rho_k & e_k & e_k \\ -i\rho_k & \delta_k & f_k & f_k \\ \overline{e_k} & \overline{f_k} & \delta_k & \frac{3}{4}\delta_k \\ \overline{e_k} & \overline{f_k} & \frac{3}{4}\delta_k & \delta_k \end{bmatrix}, \tag{4.18}$$

де

$$e_k = \Big(\frac{3}{4(A_k^2 + B_k^2)}\Big)^{1/2}(B_k\delta_k - iA_k\rho_k),\ f_k = \Big(\frac{3}{4(A_k^2 + B_k^2)}\Big)^{1/2}(-A_k\delta_k - iB_k\rho_k),$$
$$\overline{e_k} = \Big(\frac{3}{4(A_k^2 + B_k^2)}\Big)^{1/2}(B_k\delta_k + iA_k\rho_k),\ \overline{f_k} = \Big(\frac{3}{4(A_k^2 + B_k^2)}\Big)^{1/2}(-A_k\delta_k + iB_k\rho_k),$$
$$\rho_k\big(\{\pm(\lambda_k^0, \mu_k^0)\}\big) = \pm\frac{1}{2},\ \delta_k\big(\{\pm(\lambda_k^0, \mu_k^0)\}\big) = \frac{1}{2},\ k = \overline{1, N}. \tag{4.19}$$

Лема 3 *За умов* **R1**, **R2**, **NS** *спектральна щільність f поля ε є ν-припустимою, де ν – спектральна міра (4.18), (4.19) тригонометричної функції регресії (1.2), (1.3).*

Доведення. Нехай

$$f^c(\|\lambda\|) = f(\|\lambda\|)\mathcal{X}\{\lambda \in \mathbb{R}^2 : f(\|\lambda\|) \le c\} + c\mathcal{X}\{\lambda \in \mathbb{R}^2 : f(\|\lambda\|) > c\}$$

– зрізка функції f на рівні $c > 0$. Запишемо

$$\Big|\int_{\mathbb{R}^2} f(\|\lambda\|)\nu_T^{kl}(d\lambda; \theta^0) - \int_{\mathbb{R}^2} f(\|\lambda\|)\nu^{kl}(d\lambda; \theta^0)\Big| \le$$
$$\le \Big|\int_{\mathbb{R}^2} f(\|\lambda\|)\nu_T^{kl}(d\lambda; \theta^0) - \int_{\mathbb{R}^2} f^c(\|\lambda\|)\nu_T^{kl}(d\lambda; \theta^0)\Big| +$$
$$+ \Big|\int_{\mathbb{R}^2} f^c(\|\lambda\|)\nu_T^{kl}(d\lambda; \theta^0) - \int_{\mathbb{R}^2} f^c(\|\lambda\|)\nu^{kl}(d\lambda; \theta^0)\Big| +$$
$$+ \Big|\int_{\mathbb{R}^2} f^c(\|\lambda\|)\nu^{kl}(d\lambda; \theta^0) - \int_{\mathbb{R}^2} f(\|\lambda\|)\nu^{kl}(d\lambda; \theta^0)\Big| =$$
$$= I_1^{kl}(T, c) + I_2^{kl}(T, c) + I_3^{kl}(T, c),\ k, l = \overline{1, 4N}. \tag{4.20}$$

Подальші міркування аналогічні доведенню теореми 2 та розгляду прикладу 5 роботи [31], і тому ми не будемо їх проводити детально.

Перш за все, всі інтеграли $\int_{\mathbb{R}^2} f(\|\lambda\|)\nu^{kl}(d\lambda; \theta^0)$, $k, l = \overline{1, 4N}$ існують завдяки тому, що ν – атомна міра, і всі її атоми знаходяться в точках $\pm(\lambda_k^0, \mu_k^0)$, $k = \overline{1, N}$, які відокремлені від початку координат. Зауважимо далі, що

$$\lim_{c\to\infty} I_3^{kl}(c) = 0,\ k, l = \overline{1, 4N}, \tag{4.21}$$

за теоремою Лебега про монотонну збіжність. З іншого боку, при фіксованому c
$$\lim_{T\to\infty} I_2^{kl}(T,c) = 0,\ k,l=\overline{1,4N}, \tag{4.22}$$
за означенням слабкої збіжності.

Запишемо для $k,l=\overline{1,4N}$
$$I_1^{kl}(T,c) \le \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\{\lambda\in\mathbb{R}^2: f(\|\lambda\|)>c\}} \big(f(\|\lambda\|)-c\big)\frac{|g_T^k(\lambda;\theta^0)|}{d_{kT}(\theta^0)}\cdot\frac{|g_T^l(\lambda;\theta^0)|}{d_{lT}(\theta^0)}d\lambda.$$

Якщо рівень c – достатньо велике число, то за умови **NS** $\lambda\in\mathbb{R}^2$ такі, що $f(\|\lambda\|)>c$, потрапляють в настільки малий окіл нуля $V(c)$, що частоти (λ_i^0,μ_i^0), $i=\overline{1,N}$ потрапляють за межі цього околу, і тому для $\lambda\in V(c)$ прямими підрахунками можна отримати оцінки наступного вигляду: для $T>T_0$
$$d_{kT}^{-1}(\theta^0)\max_{\lambda\in V(c)}\left|g_T^k(\lambda;\theta^0)\right| \le h_k(c)T^{-1},\ k=\overline{1,4N}, \tag{4.23}$$
що призводить до оцінки
$$I_1^{kl}(T,c)\le\left(\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{V(c)}\big(f(\|\lambda\|)-c\big)d\lambda\right)h_k(c)h_l(c)T^{-2},\ k,l=\overline{1,4N}. \tag{4.24}$$

Таким чином, для будь-якого $\varepsilon>0$ та $T>T_0$ можна взяти таке $c_1>0$, що для $c>c_1$ $I_1^{kl}(T,c)<\varepsilon/3$, і таке $c_2>0$, що для $c>c_2$ $I_3^{kl}(c)<\varepsilon/3$. Фіксуючи далі $c>c_1\vee c_2$ і знаходимо $T_1=T_1(\varepsilon)>T_0$ таке, що для $T>T_1$ $I_2^{kl}(T,c)<\varepsilon/3$. Бачимо, що із співвідношень (4.21), (4.22), (4.24) вірних для $k,l=\overline{1,4N}$ випливає твердження леми. $\square$

Застосуємо теорему 4 до тригонометричної функції регресії (1.2), (1.3). Тоді ми можемо стверджувати, що нормована ОНК $\hat{u}(\theta)=d_T(\theta)(\theta_T-\theta)$ параметрів тригонометричної функції регресії (1.2), (1.3) асимптотично нормальна з нульовим середнім та блочно-діагональною коваріаційною матрицею з блоками $\gamma_k(\theta)=(2\pi)^2 f(\lambda_k^0,\mu_k^0)J_k^{-1}$, де
$$J_k=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{B_k^0}{\sqrt{4((A_k^0)^2+(B_k^0)^2)/3}} & \frac{B_k^0}{\sqrt{4((A_k^0)^2+(B_k^0)^2)/3}} \\ 0 & 1 & \frac{-A_k^0}{\sqrt{4((A_k^0)^2+(B_k^0)^2)/3}} & \frac{-A_k^0}{\sqrt{4((A_k^0)^2+(B_k^0)^2)/3}} \\ \frac{B_k^0}{\sqrt{4((A_k^0)^2+(B_k^0)^2)/3}} & \frac{-A_k^0}{\sqrt{4((A_k^0)^2+(B_k^0)^2)/3}} & 1 & \frac{3}{4} \\ \frac{B_k^0}{\sqrt{4((A_k^0)^2+(B_k^0)^2)/3}} & \frac{-A_k^0}{\sqrt{4((A_k^0)^2+(B_k^0)^2)/3}} & \frac{3}{4} & 1 \end{bmatrix},$$
$$k=\overline{1,N}. \tag{4.25}$$

Перейдемо від нормованої ОНК $\hat{u}(\theta) = d_T(\theta)(\theta_T - \theta)$ до нормованої ОНК

$$\begin{gathered}(T(A_{1T} - A_1^0),\ T(B_{1T} - B_1^0),\ T^2(\lambda_{1T} - \lambda_1^0),\ T^2(\mu_{1T} - \mu_1^0), \ldots, \\ T(A_{NT} - A_N^0), T(B_{NT} - B_N^0), T^2(\lambda_{NT} - \lambda_N^0), T^2(\mu_{NT} - \mu_N^0))\end{gathered} \tag{4.26}$$

і введемо блочно-діагональну матрицю Q з блоками

$$Q_k = \begin{bmatrix} 2^{-1/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{-1/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{1}{6}((A_k^0)^2 + (B_k^0)^2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{\frac{1}{6}((A_k^0)^2 + (B_k^0)^2)} \end{bmatrix},\ k = \overline{1, N}. \tag{4.27}$$

Тоді вектор (4.26) асимптотично нормальний $N(0, \Gamma(\theta^0))$, де $\Gamma(\theta^0)$ – блочно-діагональна матриця з блоками

$$\begin{gathered}(2\pi)^2 f(\lambda_k^0, \mu_k^0)\left[Q_k J_k Q_k\right]^{-1} = \\ = 2\pi^2 f(\lambda_k^0, \mu_k^0) \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2}B & \frac{1}{2}B \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2}A & -\frac{1}{2}A \\ \frac{1}{2}B & -\frac{1}{2}A & \frac{1}{3}((A_k^0)^2 + (B_k^0)^2) & \frac{1}{4}((A_k^0)^2 + (B_k^0)^2) \\ \frac{1}{2}B & -\frac{1}{2}A & \frac{1}{4}((A_k^0)^2 + (B_k^0)^2) & \frac{1}{3}((A_k^0)^2 + (B_k^0)^2) \end{bmatrix}^{-1}, \\ k = \overline{1, N}.\end{gathered} \tag{4.28}$$

Обертаючи ці матриці, сформулюємо остаточний результат про асимптотичну нормальність ОНК параметрів тригономентричної функції регресії (1.2), (1.3).

Теорема 5 *Якщо для тригонометричної функції регресії (1.2), (1.3) виконано умови* **R1**, **R2**, **N(ii)** *або* **N(i)** *та* **NS**, *то нормована ОНК* $(T(A_{1T} - A_1^0),\ T(B_{1T} - B_1^0),\ T^2(\lambda_{1T} - \lambda_1^0),\ T^2(\mu_{1T} - \mu_1^0), \ldots, T(A_{NT} - A_N^0), T(B_{NT} - B_N^0), T^2(\lambda_{NT} - \lambda_N^0), T^2(\mu_{NT} - \mu_N^0))$ *асимптотично нормальна з нульовим середнім та коваріаційною матрицею* $\Psi(\theta^0)$, *де* $\Psi(\theta^0)$ *- блочно-діагональна матриця з блоками*

$$\Psi_k = \frac{8\pi^2 f(\lambda_k^0, \mu_k^0)}{(A_k^0)^2 + (B_k^0)^2} \begin{bmatrix} (A_k^0)^2 + 7(B_k^0)^2 & -6A_k^0 B_k^0 & -6B_k^0 & -6B_k^0 \\ -6A_k^0 B_k^0 & 7(A_k^0)^2 + (B_k^0)^2 & 6A_k^0 & 6A_k^0 \\ -6B_k^0 & 6A_k^0 & 12 & 0 \\ -6B_k^0 & 6A_k^0 & 0 & 12 \end{bmatrix}, k = \overline{1, N}.$$

Висновки

У магістерській дисертації отримано сильну консистентність та асимптотичну нормальність ОНК в сенсі Уолкера параметрів синусоїдної моделі текстурованої поверхні за умови, що параметрична множина, що містить істинне значення векторного параметра і в якій шукається ОНК, розділяє деяким чином кутові частоти, а випадковий шум є однорідним та ізотропним гауссівським полем на площині, коваріаційна функція та однорідна спектральна щільність якого задовольняє деяким умовам регулярності, які охоплюють і випадок сильної залежності цього поля.

Природним напрямком продовження досліджень є поширення доведених теорем на негауссівські класи випадкових шумів таких, як, наприклад, лінійні випадкові поля на площині. Дуже важливою задачею також є отримання асимптотичних властивостей періодограмних оцінок параметрів текстурованої поверхні.

Важливе теоретичне значення має також узагальнення отриманих результатів на багатовимірні тригонометричні модеі регресії, в яких під знаками синусів та косинусів стоять лінійні форми від, скажімо, $d > 2$ змінних, а випадковий шум є полем, що залежить від $d-$вимірного параметра.

Список використаних джерел

[1] J. M. Francos, A. Z. Meiri, B. Porat. *A united texture model based on 2-D Wald type decomposition*, IEEE Transactions on Signal Processing **17** (1993), № 41, 2665–2678.

[2] T. Yuan, T. Subba Rao. *Spectrum estimation for random fields with application to Markov modelling and texture classification*, Markov Random Fields, Theory and Applications (R. Chellappa, A. K. Jain, eds.), "Academic Press", New York, 1993.

[3] H. Zhang, V. Mandrekar. *Estimation of hidden frequencies for 2D stationary processes*, Journal of Time Series Analysis (2001), № 22, 613–629.

[4] S. Nandi, D. Kundu, R. K. Srivastava. *Noise space decomposition method for two-dimensional sinusoidal model*, Computational Statistics and Data Analysis (2013), № 58, 147–161.

[5] P. Malliavan. *Sur la norte d'une matrice circulante Gaussienne*, Comptes Rendus de l'Academie des Sciences, Serie 1 (Mathematique) (1994), 45–49.

[6] P. Malliavan. *Estimation d'un signal Lorentzien*, Comptes Rendus de l'Academie des Sciences, Serie 1 (Mathematique) (1994), 991–997.

[7] M. I. Yadrenko. *Spectral theory of random fields*, "Optimization Software", New York, 1983.

[8] A. V. Ivanov, N. N. Leonenko. *Statistical Analysis of Random Fields*, "Kluwer Academic Publishers", Dordecht, Boston, London, 1989.

[9] A. V. Ivanov. *Consistency of the least squares estimator of the amplitudes and angular frequencies of a sum of harmonic oscillations in models with long-range dependence*, Theor. Probability and Math. Statist. (2010), № 80, 61–69.

[10] A. V. Ivanov, N. N. Leonenko, M. D. Ruiz-Medina, B. M. Zhurakovsky. *Estimation of harmonic component in regression with cyclically dependent errors*, Statistics: A Journal of Theoretical and Applied Statistics (2015), № 49, 156–186.

[11] Б. М. Жураковський. *Виявлення прихованих періодичностей в моделях регресії з локально перетвореним гаусівським стаціонарним шумом*, Дис. канд. фіз.-мат. наук, НТУУ "КПІ ім. Ігоря Сікорського" – КНУ ім. Тараса Шевченка, Київ, 2015, 146 с.

[12] C. R. Rao, L. C. Zhao, B. Zhou. *Maximum likelihood estimation of 2-D superimposed exponential*, IEEE Transactions on Signal Processing (1994), № 42, 795–802.

[13] D. Kundu, A. Mitra. *Asymptotic properties of the least squares estimates of 2-D exponential signals*, Multidimensional Systems and Signal Processing (1996), №7, 135–150.

[14] D. Kundu, S. Nandi. *Determination of Discrete Spectrum in a Random Field*, Statistica Neerlandica **57** (2003), № 2, 258–284.

[15] D. R. Brillinger. *Regression for Randomly Sampled Spatial Series: The Trigonometric case*, Journal of Applied Probability **23** (1986), 275–289.

[16] П. С. Кнопов. *Оптимальные оценки параметров стохастических систем*, "Наукова думка", Киев, 1981.

[17] A. M. Walker. *On the estimation of a harmonic component in a time series with stationary dependent residuals*, Adv. Appl. Probab. **5** (1973), 217–241.

[18] О. В. Іванов, О. В. Маляр. *Консистентність оцінки найменших квадратів параметрів текстурованої поверхні*, Наукові вісті НТУУ "КПІ"(2017), № 4, 47–53.

[19] О. В. Іванов, О. В. Маляр. *Консистентність оцінки найменших квадратів параметрів синусоїдної моделі текстурованої поверхні*, Теорія ймовірностей та математична статистика (2017), № 97, 72–82.

[20] О. В. Маляр. *Консистентність оцінки найменших квадратів параметрів текстурованої поверхні* // VI всеукраїнська конференція молодих вчених з математики та фізики. — 21-22 квітня, 2017. — Київ. — с. 25.

[21] О. В. Іванов, О. В. Маляр. *Виявлення прихованих періодичностей за спостереженнями випадкового поля на площині* // Матеріали XVIII міжнародної конференції імені академіка Михайла Кравчука. — 7-10 жовтня, 2017. — Луцьк-Київ. — т.2. — с. 41-43.

[22] О. В. Маляр. *Асимптотична нормальність оцінки найменших квадратів параметрів синусоїдної моделі текстурованої поверхні* // VII всеукраїнська конференція студентів, аспірантів та молодих вчених з математики. — 19-20 квітня, 2018. — Київ. — с. 22.

[23] A. V. Ivanov. *Asymptotic Theory of Nonlinear Regression*, "Kluwer Academic Publishers", Dordecht, Boston, London, 1997.

[24] J. Pfanzagl. *On the Measurability and Consistency of Minimum Contrast Estimates*, Metrika (1969), № 14, 249–272.

[25] J. H. Wilkinson. *The algebraic eigenvalue problem*, "Clarendon Press", Oxford, 1965.

[26] T. Alodat, A. Olenko. *Weak convergence of weighted additive functionals of long-range dependent fields*, Theor. Probability and Math. Statist. (2017), № 97, 9–23.

[27] V. Anh, N. Leonenko, A. Olenko, V. Vaskovich. *On rate of convergence in non-central limit theorems: arXiv: 1703.05900*, Submited to Bernoulli.

[28] V. Anh, N. Leonenko, A. Olenko. *On the rate of convergence to Rosenblatt-type distribution*, J. Math. Anal. Appl. (2015), № 425, 111–132.

[29] И. А. Ибрагимов, Ю. А. Розанов. *Гауссовские случайные процессы*, М.: "Наука", 1970.

[30] Р. Н. Бхаттачария, Р. Ранга Рао. *Аппроксимация нормальным распределением и асимптотические разложения*, М.: "Наука", 1982.

[31] І. М. Савич. *Асимптотичні властивості оцінок Коенкера-Бассетта параметра нелінійної регресії з сильно залежним шумом*, Дис. канд. фіз.-мат. наук, НТУУ "КПІ ім. Ігоря Сікорського" – КНУ ім.Тараса Шевченка, Київ, 2017, 144 с.